ગુજરાત શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ પરિષદના પત્ર-ક્રમાંક
જીસીઈઆરટી/સીએન્ડઈ/2018/5808, તા.07/03/2018થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ VIII

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ
ડૉ. ભાવેશ જી. દવે
શ્રી સતિષ પી. તેરૈયા
શ્રી નરેશ એમ. જાલોરિયા
ડૉ. ઉપેન્દ્ર ડી. મહેતા

પરામર્શન
ડૉ. કાનજીભાઈ વી. પટેલ
ડૉ. વિજય પટેલ
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા
શ્રી હેમંત આર. શાહ
શ્રી વિરાગકુમાર જે. ગરાલા
શ્રી મનસુરી સત્તાર એસ.
શ્રી શૈલેશ એચ. ફિચડીયા

ભાષાશુદ્ધિ
ડૉ. દિનેશ એમ. જોષી

ન ા ાા ન ા ધા ા ા
ી જયક એન. ભ
ી ભ તભાઈ પી. પટેલ
ી નરેશ એમ. લોરીયા
ી હિતેશકુમાર વી. પં ા
ા. ભરત જે. પા ક
ા. શામ ભાઈ આર. ગજેરા
ી જગત આર. શાહ
ી રાજેન એન. સોલંકી

સંયોજન
શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન
ડૉ. કમલેશ એન.પરમાર
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન
શ્રી મનીષ એચ. બધેકા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

વિતરણ-આયોજન
શ્રી હર્ષદ એચ. ચૌધરી
(નાયબ નિયામક : વહીવટ-વિતરણ)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ પરિષદ દ્વારા તા. 19/7/2017ના ઠરાવ ક્રમાંક જશભ/1217/સિંગલ ફાઇલ-62/ન થી શાળા કક્ષાએ NCERTના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ VIII**ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વર્ષ 2019થી અમલ કરવામાં આવ્યો હતો.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ થયો તે સમયે તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરવામાં આવ્યું હતું.

આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી હતી. આ કમિટીની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની એક ત્રિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું. જેમાં, ડૉ. ભાવેશ દવે, શ્રી નરેશ જાલોરિયા, ડૉ. ઉપેન્દ્ર મહેતા, શ્રી સતિષ તેરૈયા, ડૉ. વિજય પટેલ, શ્રી નિતેશ એમ. દલવાડી, ડૉ. સુરેશ કે. મકવાણા (RIE, ભોપાલ), શ્રી અજી થોમસ (RIE, ભોપાલ) એ ઉપસ્થિત રહી પોતાના કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા હતા.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન. અગ્રસચિવશ્રી (શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. આ પાઠ્યપુસ્તકની ચકાસણી શિક્ષણ વિભાગના વર્ગ 1 અને વર્ગ 2ના જે-તે વિષય જાણતા અધિકારીશ્રીઓ દ્વારા પણ કરાવવામાં આવી હતી.

વર્ષ 2023થી NCERT નવી દિલ્હીએ પોતાના પાઠ્યપુસ્તકની સંવર્ધિત આવૃત્તિ તૈયાર કરી છે. આ અનુસંધાને જીસીઈઆરટી, ગાંધીનગરના પત્રક્રમાંક : જીસીઈઆરટી/અભ્યાસક્રમ/2023/2781, તા. 21/01/2023 દ્વારા આપવામાં આવેલી સૂચના અનુસાર ગુજરાતી અનુવાદની સંવર્ધિત આવૃત્તિ તૈયાર કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

ન ા ાે ાા	**ડૉ. વિનોદ રામચંદ્ર રાવ**
નિયામક	કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા. 1 12 2 23	ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018, પુનઃમુદ્રણ : 2019, 2020, 2021, 2022, સંવર્ધિત આવૃત્તિ : 2023, પુનઃમુદ્રણ : 2024

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી વિનયગિરિ ગોસાઈ, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that childrens life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making childrens life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
30 November 2007

Preface

This is the final book of the upper primary series. It has been an interesting journey to define mathematics learning in a different way. The attempt has been to retain the nature of mathematics, engage with the question why learn mathematics while making an attempt to create materials that would address the interest of the learners at this stage and provide sufficient and approachable challenge to them. There have been many views on the purpose of school mathematics. These range from the fully utilitarian to the entirely aesthetic perceptions. Both these end up not engaging with the concepts and enriching the apparatus available to the learner for participating in life. The NCF emphasises the need for developing the ability to mathematise ideas and perhaps experiences as well. An ability to explore the ideas and framework given by mathematics in the struggle to find a richer life and a more meaningful relationship with the world around.

This is not even easy to comprehend, far more difficult to operationalise. But NCF adds to this an even more difficult goal. The task is to involve everyone of that age group in the classroom or outsidein doing mathematics. This is the aim we have been attempting to make in the series.

We have, therefore, provided space for children to engage in reflection, creating their own rules and definitions based on problems/tasks solved and following their ideas logically. The emphasis is not on remembering algorithms, doing complicated arithmetical problems or remembering proofs, but understanding how mathematics works and being able to identify the way of moving towards solving problems.

The important concern for us has also been to ensure that all students at this stage learn mathematics and begin to feel confident in relating mathematics. We have attempted to help children read the book and to stop and reflect at each step where a new idea has been presented. In order to make the book less formidable we have included illustrations and diagrams. These combined with the text help the child comprehend the idea. Throughout the series and also therefore in this book we have tried to avoid the use of technical words and complex formulations. We have left many things for the student to describe and write in her own words.

We have made an attempt to use child friendly language. To attract attention to some points blurbs have been used. The attempt has been to reduce the weight of long explanations by using these and the diagrams. The illustrations and fillers also attempt to break the monotony and provide contexts.

Class VIII is the bridge to Class IX where children will deal with more formal mathematics. The attempt here has been to introduce some ideas in a way that is moving towards becoming formal. The tasks included expect generalisation from the gradual use of such language by the child.

The team that developed this textbook consisted teachers with experience and appreciation of children learning mathematics. This team also included people with experience of research in mathematics teaching-learning and an experience of producing materials for children. The feedback on the textbooks for Classes VI and VII was kept in mind while developing this textbook. This process of development also included discussions with teachers during review workshop on the manuscript.

In the end, I would like to express the grateful thanks of our team to Professor Krishna Kumar, *Director*, NCERT, Professor G. Ravindra, *Joint Director*, NCERT and Professor Hukum Singh, *Head*, DESM, for giving us an opportunity to work on this task with freedom and with full support. I am also grateful to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of the team members from NCERT, Professor S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and in particular Dr Ashutosh K. Wazalwar who coordinated this work and made arrangements possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

It need not be said but I cannot help mentioning that all the authors worked as a team and we accepted ideas and advice from each other. We stretched ourselves to the fullest and hope that we have done some justice to the challenge posed before us.

The process of developing materials is, however, a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

H.K. DEWAN
Chief Advisor
Textbook Development Committee

શિક્ષક માટેની નોંધ

આ પા પુસ્તક એ C ે ીના ત્રી અને અંતિમ પુસ્તકનો અનુવાદ છે. ગ િતના અમૂત યાલો અને સિ ાંતોને વિ ાથીઓને મદદરૂપ થવા માટે શરૂ કરેલ સતત પ્ર િયાનું જ એક સોપાન છે. આપ ા વિદ્યાર્થીઓના ગાણિતિક ખ્યાલો સ્પષ્ટ કરવા તથા તેમનો ઉપયોગ કરવા માટે તર્કસંગત આધારોની જરૂર છે. જેનાથી તેઓ અમૂર્ત ખ્યાલો સમજશે, પૂર્વધારણાઓનો ઉપયોગ કરશે અને નવાં સૂત્રો બનાવવા સક્ષમ બનશે. રાષ્ટ્રીય અભ્યાસક્રમ માળખું-2005 (NCF-2005)નો કેન્દ્રવર્તી વિચાર એ છે કે ગણિત વિષયની મદદથી બાળકની વ્યાપક યોગ્યતાનો વિકાસ થાય તે માટે જટિલ ગણતરીથી દૂર રહે, ગણનની સાર્વત્રિક પદ્ધતિઓને સમજે, પ્રશ્નોને ઉકેલવાની સમજણ અને પેટર્ન વિકસે. તમે જાણો છો કે માત્ર કહેવાથી ગાણિતિક ખ્યાલોનો વિકાસ ન થાય. માત્ર વર્ણન કરવાથી પણ બાળકોના આ ખ્યાલો સ્પષ્ટ થતા નથી. દરેક બાળકને પોતાનું વિષય-વસ્તુનું માળખું અને એક એવા વર્ગખંડની જરૂરિયાત છે કે જ્યાં પોતાના વિચારોની ચર્ચા, પ્રશ્નોના નિરાકરણ અને નવા પ્રશ્નોનું નિર્ધારણ અને તેના ઉકેલ પોતાની રીતે રજૂ કરે અને પોતાની વ્યાખ્યાઓ હોય.

આપણે પહેલા કહ્યું એ પ્રમાણે, બાળકને પાઠ્યપુસ્તક અને ગણિતને લગતું અન્ય સંદર્ભ સાહિત્ય સમજણ સાથે વાંચતા શીખવવું અગત્યનું છે. બાળકોને ઊંડાણપૂર્વક ગણિત શીખવા મદદરૂપ થવા સારા વાંચન સાહિત્યની પણ જરૂર છે. મહેરબાની કરીને ધોરણ : 8માં એ વાતનું ધ્યાન રાખશો કે વિદ્યાર્થીઓ શું શીખ્યા છે અને તે મુજબ વિદ્યાર્થીઓને એવા વિષયવસ્તુના વાંચન માટેની તક આપવી કે, જેમાં સંકેતોની સાથે ભાષાનો ઉપયોગ કરવામાં આવ્યો હોય તેમજ કોઈ પણ પ્રકારના અતીરેક વગર સરળ સ્વરૂપમાં અને સંક્ષિપ્તમાં વિષયવસ્તુ રજૂ થયેલ હોય. આ માટે શક્ય હોય તો તેમને બીજું વિષયવસ્તુ પણ વાંચવા માટે આપો. તમે વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા ભૌતિક વિજ્ઞાન અને રસાયણ વિજ્ઞાનનાં શીખેલાં સમીકરણોની સાથે સંબંધ પ્રસ્થાપિત કરી શકો છો. વિદ્યાર્થીઓને વિવિધ વિષયોના સંદર્ભમાં ગણિતના ઉદ્દેશ્યો સમજાવવામાં અને રૂપરેખા તૈયાર કરવામાં મદદરૂપ થશે. તેઓને તર્કસંગત દલીલોની પુનઃરચના કરવા માટે સક્ષમ બનાવવાની જરૂર છે. તેમજ ગણિત વિષયને અન્ય વિષય સાથે જોડવામાં કે સંબંધ સ્થાપિત કરવા માટે જરૂરી કેટલાંક કારણો અને સંબંધોને સમજવાની જરૂર છે. ધોરણ : 8નાં બાળકોને આ બધી બાબતો માટે તક આપવી જરૂરી છે.

આપણે અગાઉ ભારપૂર્વક જણાવ્યા મુજબ ઉચ્ચ પ્રાથમિક કક્ષાએ ગણિત એ અમૂર્ત હોવાને કારણે તેને બાળકોના અનુભવ અને આસપાસના પર્યાવરણની સાથે જોડવું જોઈએ. વિષયની સરળતા અને-અથવા તેના અનુભવોને જોડતા મોડેલોથી તેના વિચારો પર કામ કરવા માટે આગળ વધવાની જરૂર છે. સૂત્રો અને સમજણપૂર્વકની દલીલ માટે અમૂર્ત તથ્યોની સમજણની જરૂર છે. અવધારણાઓની વચ્ચે આંતરિક સંબંધોની જોવાની ક્ષમતા અન્ય વિષયોના ખ્યાલોને સમજવામાં સહાય કરે છે. આ ઉપરાંત તે આપણને વિવિધ પેટર્ન, નકશા, ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળનું માપ તેમજ આકાર અને કદ વચ્ચેની સામ્યતા જોવા અને સમજવામાં મદદરૂપ બને છે. જોકે આ બાબત બીજાં ક્ષેત્રોના જ્ઞાન સાથે ગણિતને જોડવાની હોવા છતાં આપણા પર્યાવરણ અને જીવનમાં એને પુનઃ સ્થાપિત કરવાની ખૂબ જ જરૂર છે.

બાળકો પ્રાસંગિક પરિસ્થિતિઓમાં ઉપયોગી સિદ્ધાંતોને ઓળખવામાં યોગ્યતા પ્રાપ્ત કરે, તે માટે કોયડાઓને (સમસ્યાઓને) ઉકેલવાના પ્રથમ તબક્કારૂપે કોયડાઓનું સૂક્ષ્મ પરીક્ષણ કરે તથા કોયડાઓને અનુરૂપ સૂચના પસંદ કરવા યોગ્ય બને તે જરૂરી છે. એકવાર વિદ્યાર્થીઓ આ યોગ્યતા મેળવી લે ત્યારબાદ તેમણે પોતાના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવાનો રસ્તો શોધવા અને કોયડાની જરૂરિયાત મુજબ તેનો ઉકેલ શોધવા યોગ્ય બનવું જરૂરી છે. તેઓએ આ કોયડાને ઓળખવા કે સમજવા સંભવિત ઉકેલો મેળવવા અને જરૂર પડે તો આ તબક્કાઓ ફરીથી પુનરાવર્તિત કરવા અથવા ફરીથી તૈયાર કરવાની જરૂરિયાત છે. જેમ જેમ તેઓ આગળ વધશે તેમ તેમ તેઓનું કામ વધુ વિસ્તૃત બનશે. ધોરણ : 8માં આપણે વિદ્યાર્થીઓને તેઓ દ્વારા અનુસરવાનાં સોપાનો વિશે સભાન રાખીશું. બાળકો કોયડાના ઉકેલ શોધીને યોગ્ય મોડેલ તૈયાર કરવાની યોગ્યતા વિકસાવે, તે અંગે તેઓ પોતાની વ્યૂહરચના વિકસાવે અને કોયડાનું વિશ્લેષણ કરવાની ક્ષમતા વિકસાવે તે માટે તેઓને મદદ કરવી ખૂબ જ જરૂરી છે. આ માટે તેમને વર્ષોના સંશોધન બાદ મેળવેલા ગાણિતિક નિયમો સમજાવવામાં આવે તે અગત્યનું છે.

ગણિતને શીખવા માટે માત્ર રીત કે ઉકેલને યાદ રાખવા એ પૂરતું નથી, પરંતુ કોયડાનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવો અને રસપ્રદ પરિસ્થિતિનું નિર્માણ કરવું તે પણ જરૂરી છે.

જૂથ કાર્ય દ્વારા શિક્ષણ, વાતચીત દ્વારા શિક્ષણ, એક-બીજા પાસેથી શીખવાની ઇચ્છા અને ક્ષમતા તથા આ વાતચીત કોઈ ઘોંઘાટ નથી અને પરામર્શન એ કોઈ છેતરપિંડી નથી. એ વાતનો સ્વીકાર કરવો એ શિક્ષક તરીકે તમારા અને વિદ્યાર્થીઓના વલણમાં પણ આવનારા પરિવર્તનનો એક અગત્યનો ભાગ છે. વિદ્યાર્થીઓએ પોતાના અનુભવોમાંથી

મેળવેલ ઉદાહરણો સમૂહમાં રજૂ કરે એ માટે તેમને પ્રોત્સાહિત કરવા જોઈએ. વિદ્યાર્થીઓ પુસ્તકોનું સમૂહમાં વાંચન કરે અને જે કંઈ સમજેલ છે તેની જૂથમાં રજૂઆત કરે તથા સૂત્ર સ્વરૂપે વર્ણન કરે તે માટે તેઓને પ્રેરિત કરવા જોઈએ. મૂલ્યાંકન પદ્ધતિમાં પણ આ કાર્યની ઓળખ થતી હોવી જોઈએ અને તેની નોંધ લેવી જોઈએ. ઉપરાંત વર્ગને આ પ્રમાણે જૂથમાં વિભાજિત કરવો જોઈએ; જેથી બધા વિદ્યાર્થીઓ એકબીજા સાથે રહીને આનંદ ઉલ્લાસથી જૂથમાં પોતાનું યોગદાન આપે. તમે જોયું હશે કે જુદો-જુદો સમૂહ જુદી-જુદી વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ કરે છે. જ્યારે તેઓ પોતાના મોડેલ કે વિચારોનો ઉલ્લેખ કરે છે. તેમાં અમુક વિચારો એટલા પ્રભાવશાળી નથી હોતા કે જેટલા બીજાના હોય છે. આ બધામાંથી યોગ્ય હોય તેનું બાળકો સામે વિશ્લેષણ કરવું ખૂબ જ જરૂરી છે. અલગ-અલગ વ્યૂહરચનાઓનું પ્રદર્શન ગાણિતિક સમજને ખૂબ ઊંડાણ સુધી લઈ જાય છે. દરેક જૂથ એક સ્થિતિથી શરૂ કરે છે અને તેને આવી બાબત માટે એક તક આપવાની જરૂરિયાત છે.

અહીં, ગણિત શિક્ષણના મુખ્ય વિચારોને ટૂંકમાં રજૂ કર્યા છે. જેનો તમે તમારા વર્ગખંડમાં ઉપયોગ કરશો તો તે અમને ગમશે.

1. સમજણ મેળવવા માટે પૂછપરછ કરવી એ એક સ્વાભાવિક પ્રક્રિયા છે, જેની મદદથી વિદ્યાર્થીઓ જ્ઞાન પ્રાપ્ત કરે છે અને તેની રચના કરે છે. આ રીતે જ્ઞાન મેળવવા માટે વિવિધ અવલોકનોનો ઉપયોગ કરવો પડે છે. વિદ્યાર્થીઓએ (ભૂમિતિ, અંકગણિત અને બીજગણિતના) વિવિધ પ્રકારના પ્રશ્નોના ઉત્તરો આપવા ઉપરાંત પડકારરૂપ, તપાસ-તલાશ કરવામાં સહાયભૂત, ખુલ્લા-અંતવાળા, સંદર્ભ ધરાવતા અને સરખા ગાણિતિક પ્રશ્નોના ઉકેલો મેળવવાનો મહાવરો કરવાનો છે.
2. વિદ્યાર્થીઓએ તર્કસંગત દલીલો આપવી અને તેને અનુસરવું, પ્રસ્તુત તર્ક-વિતર્કમાંથી બહાર નીકળવાનો રસ્તો શોધવો. ઉપરાંત આધાર સાથે સાબિતી રજૂ કરવાની સમજણ આપવી જરૂરી છે.
3. ગણિતના તાસમાં ભાષાનો ગણિત સાથે સંબંધ પ્રસ્થાપિત થવો જોઈએ. બાળકે પોતાની ભાષા અને અનુભવોનો ઉપયોગ કરીને પોતાના વિચારો વિશે વાત કરવી જોઈએ. તેઓને પોતાના શબ્દો અને ભાષાનો ઉપયોગ કરવા માટે પ્રોત્સાહિત કરવા જોઈએ. ઉપરાંત ધીમે-ધીમે ઔપચારિક ભાષા અને સંકેતોનો ઉપયોગ કરે તે માટે પણ પ્રોત્સાહિત કરવા જોઈએ.
4. સંખ્યા પદ્ધતિને સંમેય સંખ્યાઓ અને તેના ગુણધર્મોની સામાન્યીકરણ સુધીના સ્તરે લઈ જવામાં આવી છે. જેમાં અગાઉની બધી પદ્ધતિઓને સંમેય સંખ્યાના વ્યાપકરૂપમાં ઉપગણના રૂપમાં દર્શાવેલ હોય. સામાન્યીકરણ એ ગાણિતિક ભાષામાં રજૂ કરવું જોઈએ અને વિદ્યાર્થીઓએ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ કે બીજગણિત અને તેની ભાષા ઘણા બધા શબ્દને ટૂંકા સંકેતના રૂપે રજૂ કરવામાં મદદ કરે છે.
5. અગાઉ જણાવ્યા મુજબ વિદ્યાર્થીઓ પાસે અપેક્ષિત છે કે તેઓ વધુમાં વધુ કોયડાઓની રચના કરે, ઉકેલ મેળવે. આપણે આશા રાખીએ કે વિદ્યાર્થીઓ મોટી સંખ્યામાં જટિલ કોયડાઓની રચના કરશે તેમ તેમ પોતાના વિચાર અને જ્ઞાન પ્રત્યે તેનો આત્મવિશ્વાસ વધશે.
6. ધોરણ : 8ના આ પાઠ્યપુસ્તકમાં ગણિતના વિભિન્ન આયામો એક જગ્યાએ કેન્દ્રિત કરવાનો પ્રયત્ન કરવામાં આવેલ છે. સામાન્ય વિધિઓ પર વિશેષ ધ્યાન આપેલ છે. ત્રિરાશિ પદ્ધતિ, ગુણોત્તર અને પ્રમાણ, વ્યાજ આ બધા પાછળ એક જ તાર્કિક ખ્યાલ રહેલો છે. ગણિતની કોઈ પણ શાખામાં અજ્ઞાત રાશિને જ્ઞાત કરવા માટે ચલ અને સમીકરણોના વિચારની જરૂર પડે છે.

આપણે આશા રાખીએ કે આ પુસ્તક બાળકને આનંદ સાથે ગણિતને શીખવામાં મદદરૂપ થાય અને ખ્યાલોનો પરિચય મેળવવા આત્મવિશ્વાસનું સિંચન થાય. આપણે બાળકોને વ્યક્તિગત રીતે અને સામુદાયિક રીતે તકનું નિર્માણ માટેની ઈચ્છા કરીએ છીએ.

વ ા 2 23થી C નવી દિ લીએ પોતાના પા પુસ્તકની સંવ ધત આવ િ તૈયાર કરી છે. આ અનુસંધાને સી આરટી, ગાંધીનગરની સૂચના અનુસાર ગુજરાતી અનુવાદની પ સંવ ધત આવ િ તૈયાર કરવામાં આવેલ છે.

આ પુસ્તક વિશે આપના વિચારો અને સૂચનોને અમે આવકારીએ છીએ અને આશા રાખીએ છીએ કે શિક્ષણ કાર્ય દરમિયાન તમારા દ્વારા વિશેષરૂપે વિકાસ પામેલ રસપ્રદ સ્વાધ્યાય, પ્રવૃત્તિઓ અને શૈક્ષણિક મુદ્દાઓ મોકલશો. જેનો ભવિષ્યમાં નવી આવૃત્તિમાં સમાવેશ થઈ શકે. આ ત્યારે જ શક્ય બનશે કે જ્યારે તમે વિદ્યાર્થીઓને ધ્યાનપૂર્વક સાંભળવા માટે તત્પર બનશો. ઉપરાંત વિદ્યાર્થીઓની ત્રૂટિઓ કે ખામીઓ ઓળખશો અને તેના વિચારોને વ્યક્ત કરવા તક આપશો.

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor and Head*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan

Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

B.C. Basti, *Senior Lecturer*, Regional Institute of Education, Mysore, Karnataka

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai Maharashtra

K.A.S.S.V. Kameshwar Rao, *Lecturer*, Regional Institute of Education, Shyamala Hills Bhopal (M.P.)

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.)* (Retd.), NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

P. Bhaskar Kumar, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Distt. Anantpur (A.P.)

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), NCERT, New Delhi

Shailesh Shirali, Rishi Valley School, Rishi Valley, Madanapalle (A.P.)

S.K.S. Gautam, *Professor*, DEME, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *Principal*, Florets International School, Panki, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBER-COORDINATOR

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Shri Pradeep Bhardwaj, *TGT* (Mathematics) Bal Sthali Public Secondary School, Kirari, Nangloi, New Delhi; Shri Sankar Misra, *Teacher* in Mathematics, Demonstration Multipurpose School, Regional Institute of Education, Bhubaneswar (Orissa); Shri Manohar M. Dhok, *Supervisor,* M.P. Deo Smruti Lokanchi Shala, Nagpur (Maharashtra); Shri Manjit Singh Jangra, *Maths teacher,* Government Senior Secondary School, Sector-4/7, Gurgoan (Haryana); Dr. Rajendra Kumar Pooniwala, U.D.T., Government Subhash Excellence School, Burhanpur (M.P.); Shri K. Balaji, TGT (Mathematics), Kendriya Vidyalaya No.1, Tirupati (A.P.); Ms. Mala Mani, Amity International School, Sector-44, Noida; Ms. Omlata Singh, *TGT* (Mathematics), Presentation Convent Senior Secondary School, Delhi; Ms. Manju Dutta, Army Public School, Dhaula Kuan, New Delhi; Ms. Nirupama Sahni, *TGT* (Mathematics), Shri Mahaveer Digambar Jain Senior Secondary School, Jaipur (Rajasthan); Shri Nagesh Shankar Mone, *Head Master,* Kantilal Purshottam Das Shah Prashala, Vishrambag, Sangli (Maharashtra); Shri Anil Bhaskar Joshi, *Senior teacher* (Mathematics), Manutai Kanya Shala, Tilak Road, Akola (Maharashtra); Dr. Sushma Jairath, *Reader,* DWS, NCERT, New Delhi; Shri Ishwar Chandra, *Lecturer (S.G.)* (Retd.) NCERT, New Delhi.

The Council is grateful for the suggestions/comments given by the following participants during the workshop of the mathematics Textbook Development Committee Shri Sanjay Bolia and Shri Deepak Mantri from Vidya Bhawan Basic School, Udaipur; Shri Inder Mohan Singh Chhabra, Vidya Bhawan Educational Resource Centre, Udaipur.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr. R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi; Dr. Sanjay Mudgal, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi; Dr. T.P. Sharma, *Lecturer,* DESM, NCERT, New Delhi for the improvement of the book.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, Head, DESM, NCERT.

The Council also acknowledges the efforts of Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar, Neelam Walecha, *DTP Operators*; Kanwar Singh, *Copy Editor;* Abhimanu Mohanty, *Proof Reader*, Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge*, DESM, NCERT for technical assistance, APC Office and the Administrative Staff, DESM, NCERT and the Publication Department of the NCERT.

અનુક્રમણિકા

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

પ્રકરણ

1

સંમેય સંખ્યાઓ

GG23LM

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતશાસ્ત્રમાં આપણે સુરેખ (સાદા) સમીકરણને વારંવાર ઉકેલીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

જો સમીકરણ (1)માં આપણે $x = 11$ મૂકીએ, તો આ સમીકરણનો ઉકેલ મળે છે. કેમ કે xની કિંમત 11 મૂકતાં સમીકરણનું સમાધાન થાય છે. આ સમીકરણનો ઉકેલ 11 જે એક **પ્રાકૃતિક સંખ્યા (Natural Number)** છે. જ્યારે સમીકરણ

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)નો ઉકેલ **પૂર્ણ સંખ્યા (Whole Number)** 0 (શૂન્ય) છે. જો આપણે માત્ર પ્રાકૃતિક સંખ્યા જ વિચારીએ તો સમીકરણ (2) ઉકેલી શકાય નહિ. સમીકરણ (2)ને ઉકેલવા માટે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સમૂહમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરવું પડે છે. આમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરતાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ મળે. પરંતુ પૂર્ણ સંખ્યાઓ પણ કેટલાંક સમીકરણ ઉકેલવા માટે પૂરતી નથી. જેવાં કે,

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

તમે નિરીક્ષણ કર્યું કે, આવું કેમ ? આ સમીકરણ (3)ના ઉકેલ માટે (–13) સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **પૂર્ણાંક (ધન ને -**) સંખ્યા તરફ દોરી જાય છે. અહીં નોંધીએ કે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને સંલગ્ન છે. હવે કોઈ એમ પણ વિચારી શકે કે આપણી પાસે સુરેખ સમીકરણોને ઉકેલવા માટે પૂરતી સંખ્યામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

હવે નીચેનાં સમીકરણો ચકાસો.

$$2x = 3 \qquad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

ઉપરનાં કયાં સમીકરણો માટે આપણને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ઉકેલ તરીકે મળતી નથી. (તપાસો) આ બાબતની ચકાસણી કરતાં સમીકરણ (4) માટે $\frac{3}{2}$ અને સમીકરણ (5) માટે $\frac{-7}{5}$ સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **સંમેય સંખ્યા** તરફ દોરી જાય છે.

આપણે **સંમેય સંખ્યા** પરની મૂળભૂત ક્રિયાઓ જોઈ ગયાં છીએ. હવે આપણે અત્યાર સુધી શીખેલ જુદા જુદા પ્રકારની સંખ્યાઓ માટેની ગાણિતિક ક્રિયાઓના ગુણધર્મો સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

1.2 સંમેય સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

1.2.1 સંવૃત્તતા (Closure)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ (Whole numbers)

આવો, ફરી એક વખત સંક્ષેપમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે બધી ક્રિયાઓ પર સંવૃત્તતાના ગુણધર્મની ચર્ચા કરીએ.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 5 = 5$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $4 + 7 = ...$ શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે, કોઈપણ બે પૂર્ણ સંખ્યા a અને b માટે $a + b$ પૂર્ણ સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$5 - 7 = -2$ એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.
ગુણાકાર	$0 \times 3 = 0$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $3 \times 7 = ...$ શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે જો a અને b કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય તો તેનો ગુણાકાર ab પણ પૂર્ણ સંખ્યા જ હોય.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સંદર્ભમાં પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે સંવૃત્તતાના ગુણધર્મોની ચકાસણી કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (Integers)

હવે આપણે ફરીથી યાદ કરી લઈએ કે કઈ ક્રિયાઓ અંગે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$-6 + 5 = -1$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-7 + (-5)$ શું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? શું $8 + 5$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $a + b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$7 - 5 = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $5 - 7$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-6 - 8 = -14$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-6 - (-8) = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $8 - (-6)$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a - b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. ચકાસો કે $b - a$ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ગુણાકાર	$5 \times 8 = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું -5×8 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-5 \times (-8) = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. સામાન્ય રીતે કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે જોયું કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે પણ બાદબાકી અને ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી. જ્યારે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે, પણ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ (Rational numbers)

તમે યાદ કરો કે જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$, (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $q \neq 0$) સ્વરૂપે લખી શકાય તેવી સંખ્યાને **સંમેય સંખ્યાઓ** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે : $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{9}{-5}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ છે. જ્યારે 0, –2, 4 ને પણ $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપે લખી શકાય છે. તેથી તે પણ સંમેય સંખ્યાઓ છે. (ચકાસણી કરો !)

(a) બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કઈ રીતે થાય તે તમે જાણો છો. ચાલો, થોડી સંમેય સંખ્યાઓની જોડનો સરવાળો કરીએ.

$$\frac{3}{8} + \frac{(-5)}{7} = \frac{21 + (-40)}{56} = \frac{-19}{56} \qquad \text{(સંમેય સંખ્યા છે.)}$$

$$\frac{-3}{8} + \frac{(-4)}{5} = \frac{-15 + (-32)}{40} = \ldots \qquad \text{શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?}$$

$$\frac{4}{7} + \frac{6}{11} = \ldots \qquad \text{શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?}$$

આપણને બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં સંમેય સંખ્યા મળે છે. વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડ માટે ચકાસણી કરો.

આપણે કહી શકીએ કે સરવાળાની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે, *અર્થાત્ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b$ પણ સંમેય સંખ્યા મળે છે.*

(b) શું બે સંમેય સંખ્યાઓનો તફાવત ફરીથી સંમેય સંખ્યા મળે ?

આપણી પાસે,

$$-\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21} \qquad \text{(સંમેય સંખ્યા છે.)}$$

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25-32}{40} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

થોડી વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડ માટે પ્રયત્ન કરો. આપણે કહી શકીએ કે બાદબાકીની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. અર્થાત્, બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a - b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.

(c) ચાલો, બે સંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકારની ક્રિયાઓમાં શું થાય છે તે આપણે જોઈએ.

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}$; $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (બંનેનો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{-4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

તમે સંમેય સંખ્યાઓની વધુ જોડ લઈ ચકાસણી કરો કે તે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ફરીથી સંમેય સંખ્યા આવે છે કે નહીં.

આપણે કહી શકીએ કે, ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. *કેમ કે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.*

(d) આપણે નોંધીએ કે $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

શું તમે કહી શકો કે સંમેય સંખ્યાઓ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે ? કોઈ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \div 0$ એ **અવ્યાખ્યાયિત** છે. તેથી કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ **સંવૃત્ત નથી.** જો કે આપણે શૂન્યને અપવાદ ગણીએ તો કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

સંખ્યાઓ	**ક્રિયા માટે સંવૃત્ત**			
	સરવાળો	**બાદબાકી**	**ગુણાકાર**	**ભાગાકાર**
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	હા	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	હા	...	ના
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

1.2.2 ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

પૂર્ણ સંખ્યાઓની જુદી-જુદી ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી કોષ્ટકની ખાલી જગ્યા ભરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = \ldots + \ldots = \ldots$ કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે જાતે ચકાસો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે ચકાસણી કરી અને નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	શું $5 - (-3) = -3 - 5$?	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

તમે જાણો છો કે બે સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો કઈ રીતે કરાય. ચાલો આપણે થોડીક સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કરીએ.

$$\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{1}{21} \text{ અને } \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{21}$$

તેથી, $\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right)$

વળી, $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \ldots$ અને $\frac{-8}{3} + \left(\frac{-6}{5}\right) = \ldots$

શું $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \left(\frac{-8}{3}\right) + \left(\frac{-6}{5}\right)$ છે ?

શું $\frac{-3}{8} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \left(\frac{-3}{8}\right)$ છે ?

તમે જોયું કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરીએ તો મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં સરવાળાની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. જેમ કે, કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$.

(b) બાદબાકી

શું $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$ છે ?

શું $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ છે ?

તમે જોશો કે સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી. અહીં નોંધો કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી અને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ પણ છે.

તેથી સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(c) ગુણાકાર

અહીં, $\frac{-7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{-42}{15} = \frac{6}{5} \times \left(\frac{-7}{3}\right)$

શું $\frac{-8}{9} \times \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{-4}{7} \times \left(\frac{-8}{9}\right)$ છે ?

આવી બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈ ગુણાકાર માટે ક્રમના ગુણધર્મની ચકાસણી કરો.

તમને જાણવા મળશે કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં ગુણાકાર કરીએ તો પણ મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ગુણાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.

સામાન્ય રીતે $a \times b = b \times a$ (કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે)

(d) ભાગાકાર

શું $\frac{-5}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \div \left(\frac{-5}{4}\right)$ છે ?

તમે જોશો કે બંને બાજુઓ સમાન થતી નથી. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ભાગાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	ક્રમનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	...	...	ના

1.2.3 જૂથનો ગુણધર્મ (Associativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

નીચેના કોષ્ટકની મદદથી પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળા માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકી માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? શું $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણ સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરી અને છેલ્લા ખાનામાં કરેલ નોંધની ચકાસણી કરો.
આ ઉપરાંત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી જાતે કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ચાર ક્રિયાઓ અંગે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે કેમ તે નીચેના કોષ્ટકની મદદથી જોઈ શકાશે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	શું $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3] + (-4)$ થાય ? શું $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a + (b + c) = (a + b) + c$	સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	$5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ થાય ?	બાદબાકીની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $5 \times [(-7) \times (-8)]$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ થાય ? શું $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	શું $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ થાય ?	ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

આપણી પાસે,

$$\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \frac{-2}{3} + \left(\frac{-7}{30}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

$$\left[-\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{15} + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

તેથી $\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \left[\frac{-2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right)$

ઉપરાંત, $\frac{-1}{2} + \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ અને $\left[\frac{-1}{2} + \frac{3}{7}\right] + \left(\frac{-4}{3}\right)$ શોધો.

શું બંનેનો સરવાળો સમાન આવે છે ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ સરવાળો કરો અને તપાસો કે બંને સમાન આવે છે ? આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a + (b + c) = (a + b) + c$.*

(b) બાદબાકી

તમે જાણો છો કે બાદબાકીની ક્રિયામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો સંમેય સંખ્યાઓ માટે

શું $\frac{-2}{3} - \left[\frac{-4}{5} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{5}\right)\right] - \frac{1}{2}$ થાય ?

ઉપરની બાબતની ચકાસણી તમારી જાતે કરો.

સંમેય સંખ્યાઓ માટે બાદબાકીની ક્રિયામાં **જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.**

(c) ગુણાકાર

ચાલો આપણે ગુણાકારની ક્રિયા માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી કરીએ.

$$\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{-7}{3} \times \frac{10}{36} = \frac{-70}{108} = \frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9} = \ldots$$

આપણને મળશે કે, $\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9}$

શું $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right) \times \frac{4}{5}$ થાય ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ ગુણાકાર કરો અને ચકાસો કે બંને ગુણાકાર સમાન આવે છે કે નહીં.

આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,* $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) ભાગાકાર

યાદ કરો કે, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો પછી સંમેય સંખ્યાઓ માટે શું ?

અહીં, જો $\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$ ચકાસીએ.

ડા. બા. $= \frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ [$\because \frac{5}{2}$ એ $\frac{2}{5}$નો વ્યસ્ત છે.)

$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-5}{6}\right) = \ldots$

જ. બા.$= \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5} = \ldots$

શું ડા.બા. = જ.બા. થાય છે ? જાતે ચકાસણી કરો. તમને જાણવા મળશે કે સંમેય સંખ્યાઓ માટે ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	જૂથનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	...	...	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

ઉદાહરણ 1 : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$ [7, 11, 21 અને 22નો લ.સા.અ. 462 થાય.]

$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$

આ ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે પણ ઉકેલી શકાય :

$$\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \frac{5}{22}$$

$$= \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-8}{21}\right)\right] + \left[\frac{-6}{11} + \frac{5}{22}\right]$$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= \left[\frac{9 + (-8)}{21}\right] + \left[\frac{-12 + 5}{22}\right]$$

[7 અને 21નો લ.સા.અ 21; 11 અને 22નો લ.સા.અ. 22]

$$= \frac{1}{21} + \left(\frac{-7}{22}\right)$$

$$= \frac{22 - 147}{462}$$

$$= \frac{-125}{462}$$

શું તમને લાગે છે કે ક્રમનો ગુણધર્મ અને જૂથનો ગુણધર્મ આ ગણતરીને સરળ બનાવે છે ?

ઉદાહરણ 2 : કિંમત શોધો : $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

ઉકેલ : આપણી પાસે $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

$$= \left[-\frac{4 \times 3}{5 \times 7}\right] \times \left[\frac{15 \times (-14)}{16 \times 9}\right]$$

$$= \frac{-12}{35} \times \left(\frac{-35}{24}\right) = \frac{-12 \times (-35)}{35 \times 24} = \frac{1}{2}$$

આ ગણતરી બીજી રીતે પણ કરી શકાય.

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{5} \times \frac{15}{16}\right) \times \left[\frac{3}{7} \times \left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2.4 શૂન્યની ભૂમિકા

નીચેના પદ જુઓ :

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (પૂર્ણાંક સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (સંમેય સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

તમે આવા સરવાળા પહેલાં પણ કરેલ છે. ચાલો, આવા બીજા વધુ સરવાળા કરીએ.

તમે શું જોયું ? જ્યારે પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યા પણ પૂર્ણ છે. આવું પૂર્ણાંક અને સંમેય સંખ્યા માટે પણ બને છે.

સામાન્ય રીતે, $a + 0 = 0 + a = a$ જ્યાં, a એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

$b + 0 = 0 + b = b$ જ્યાં b એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

$c + 0 = 0 + c = c$ જ્યાં c એ સંમેય સંખ્યા છે.

આમ, શૂન્યને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) કહે છે. તે પૂર્ણાંક અને પૂર્ણ સંખ્યા માટે પણ સરવાળાનો તટસ્થ ઘટક છે.

1.2.5 1ની ભૂમિકા

અહીં,

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (પૂર્ણ સંખ્યાને 1 વડે ગુણતાં)

$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$

$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

તમે શું જોયું ?

જ્યારે આપણે સંમેય સંખ્યાને 1 વડે ગુણીએ છીએ, ત્યારે એ જ સંમેય સંખ્યા નીપજ તરીકે મળે છે. આ બાબતની અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ સાથે ગુણાકાર કરી ચકાસણી કરો. આપણને જોવા મળશે. કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \times 1 = 1 \times a = a$.

આપણે કહી શકીએ કે ***1 એ ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) છે.***

શું 1 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ? શું તે પૂર્ણ સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો કોઈ ગુણધર્મ સંમેય સંખ્યા માટે સાચો હોય તો તે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ સાચો હોય ? પૂર્ણ સંખ્યા માટે શું કહી શકાય ? ક્યારે સાચો અને ક્યારે સાચો નહીં ?

1.2.6 સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન

આ બાબતને સમજવા માટે, ચાલો $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ અને $\frac{-5}{6}$ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ.

$$\text{હવે, } \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{(4) + (-5)}{6}\right\}$$

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$\text{પણ } \frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{-3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

અને $\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{5}{8}$

આથી, $\left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

આમ, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

ગુણાકારનું સરવાળા પર અને બાદબાકી પર વિભાજન

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a, b અને c માટે,

$a\ (b + c) = ab + ac$

$a\ (b - c) = ab - ac$

પ્રયત્ન કરો

વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શોધો : (i) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{12}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16} \times \frac{4}{12}\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times \frac{-3}{9}\right\}$

ઉદાહરણ 3 : કિંમત શોધો : $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5}$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

[ક્રમનો ગુણધર્મ]

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{-3}{7}\right) \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

$= \frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{14}$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= \frac{-3}{7} \times 1 - \frac{1}{14}$

$= \frac{-6 - 1}{14}$

$= \frac{-1}{2}$

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચે આપેલ ગુણાકારની ક્રિયામાં કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ થયેલ છે તે જણાવો.

(i) $\frac{-4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times \frac{-13}{17}$

(iii) $\frac{-19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$

2. $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right)$ની $\left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$ રીતે ગણતરી કયા ગુણધર્મના ઉપયોગથી કરી શકાય તે જણાવો.

3. બે સંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર હંમેશા _____ જ હોય.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંમેય સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા અંગે **સંવૃત્ત** હોય છે.
2. સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા દરમ્યાન,

   (i) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ક્રમના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.

   (ii) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **જૂથના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.
3. સંમેય સંખ્યા શૂન્ય (0) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **સરવાળાનો તટસ્થ** ઘટક છે.
4. સંમેય સંખ્યા 1 (એક) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ગુણાકારનો તટસ્થ** ઘટક છે.
5. સંમેય સંખ્યા માટે **વિભાજનનો ગુણધર્મ** : સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,

   $a(b + c) = ab + ac$ અને $a(b - c) = ab - ac$
6. કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ આવેલ હોય છે. બે સંખ્યાઓના **મધ્યક**નો ખ્યાલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંખ્યાઓ શોધવામાં મદદરૂપ બને છે.

પ્રકરણ

2

એક ચલ સુરેખ સમીકરણ

2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના ધોરણમાં તમે કેટલીક **બૈજિક પદાવલિઓ** અને **સમીકરણો** વિશે જાણકારી મેળવી છે. એવી પદાવલિઓ, જે આપણે શીખ્યાં છીએ, તેનાં થોડાંક ઉદાહરણ :

$$5x,\ 2x - 3,\ 3x + y,\ 2xy + 5,\ xyz + x + y + z,\ x^2 + 1,\ y + y^2$$

અને સમીકરણનાં થોડાં ઉદાહરણ : $5x = 25$, $2x - 3 = 9$, $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$, $6z + 10 = -2$

તમને યાદ હશે કે સમીકરણમાં હંમેશાં સમતા (બરાબર) (=) ના ચિહ્નનો ઉપયોગ થાય છે, જ્યારે પદાવલિમાં તેનો ઉપયોગ થતો નથી.

ઉપરની અમુક પદાવલિઓમાં એકથી વધારે ચલનો ઉપયોગ કરેલ છે. ઉદાહરણ તરીકે $2xy + 5$માં બે ચલ છે. તેમ છતાં, હવે આપણે સમીકરણ બનાવવા ફક્ત એક જ ચલનો ઉપયોગ કરીશું. તદુપરાંત, ફક્ત સુરેખ પદાવલિઓ જ સમીકરણ બનાવવા ઉપયોગમાં લઈશું એટલે કે પદાવલિમાં રહેલા ચલની મોટામાં મોટી ઘાત 1 હશે.

સુરેખ પદાવલિના ઉદાહરણ આ મુજબ છે.

$$2x,\ 2x + 1,\ 3y - 7,\ 12 - 5z,\ \frac{5}{4}(x - 4) + 10$$

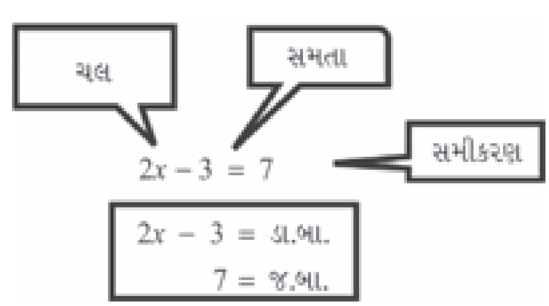
નીચે મુજબની પદાવલિઓ સુરેખ પદાવલિઓ નથી.

$x^2 + 1$, $y + y^2$, $1 + z + z^2 + z^3$ (અહીં ચલની અધિકતમ ઘાત 1 કરતાં વધારે છે.)

હવે આપણે સમીકરણોમાં એક ચલવાળી સુરેખ પદાવલિઓનો જ ઉપયોગ કરીશું. આવા સમીકરણને **એક ચલ સુરેખ સમીકરણ** કહે છે. અગાઉના ધોરણમાં તમે જે સાદાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવવાનું શીખ્યા હતા તે આ પ્રકારનાં હતાં.

ચાલો, હવે જે જાણીએ છીએ તેનું ટૂંકમાં પુનરાવર્તન કરીએ.

(a) *બૈજિક સમીકરણ એ ચલોના ઉપયોગથી બનતી સમતા છે.* તેમાં સમતા (બરાબર) (=) નું ચિન્હ હોય છે. સમતાના ચિહ્નની ડાબી બાજુની પદાવલિને ડા.બા. (LHS) તથા જમણી બાજુની પદાવલિને જ.બા. (RHS) કહે છે.



(b) *સમીકરણમાં ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુએ આવેલી પદાવલિઓનું મૂલ્ય સમાન હોય છે.* આવું, ફક્ત ચલનાં અમુક ચોક્કસ મૂલ્યો માટે જ સાચું છે. તેથી આવાં મૂલ્યને સમીકરણનો **ઉકેલ** કહે છે.

$x = 5$ એ સમીકરણ $2x - 3 = 7$નો ઉકેલ છે.
$x = 5$ માટે ડા.બા. $= 2 \times 5 - 3 = 7 =$ જ.બા.
જ્યારે $x = 10$ એ સમીકરણનો ઉકેલ નથી.
$x = 10$ માટે ડા.બા. $= 2 \times 10 - 3 = 17$ જે જ.બા.ને બરાબર નથી.

(c) *સમીકરણનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવીશું ? આપણે સમીકરણની બંને બાજુ ત્રાજવાનાં બે પલ્લાંની જેમ સંતુલિત છે તેમ માનીએ છીએ.* આથી આપણે સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન ગાણિતિક ક્રિયાઓ કરીશું જેથી તેની સંતુલિતતા ખોરવાય નહીં. આવાં થોડાંક પદો પછી તમને સમીકરણનો ઉકેલ મળી જશે.

2.2 બંને બાજુ ચલ હોય તેવા સમીકરણોનો ઉકેલ

4XHJRH

સમીકરણ એ બે પદાવલિઓનાં મૂલ્યો વચ્ચેની સમતા છે.

સમીકરણ $2x - 3 = 7$ માં રહેલી બે પદાવલિઓ અનુક્રમે $2x - 3$ અને 7 છે. અત્યાર સુધી આપણે લીધેલા દરેક ઉદાહરણમાં જમણી બાજુ ફક્ત સંખ્યા જ હતી. પરંતુ, આવું આવશ્યક નથી. બંને બાજુ ચલવાળી પદાવલિ પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ $2x - 3 = x + 2$ માં બંને બાજુએ ચલ હોય તેવી પદાવલિઓ છે. ડાબી બાજુની પદાવલિ $2x - 3$ છે અને જમણી બાજુની પદાવલિ $x + 2$ છે.

- હવે આપણે બંને બાજુ ચલવાળી પદાવલિઓ હોય તેવાં સમીકરણોનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવો તે વિશે ચર્ચા કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : ઉકેલ શોધો : $2x - 3 = x + 2$

ઉકેલ : આપણી પાસે

$$\therefore\ 2x = x + 2 + 3$$

$$\therefore\ 2x = x + 5$$

$$\therefore\ 2x - x = x + 5 - x \qquad \text{(બંને બાજુથી } x \text{ બાદ કરતાં)}$$

$$x = 5 \qquad \text{(ઉકેલ)}$$

અહીં, આપણે સમીકરણની બંને બાજુથી ફક્ત સંખ્યા (અચળ પદ) જ નહીં પરંતુ ચલવાળું પદ પણ બાદ કરેલ છે. કારણ કે, ચલ પોતે પણ એક સંખ્યા જ છે. ધ્યાન રાખો કે અહીં બંને બાજુથી x બાદ કરવું તે હકીકતમાં x ને ડાબી બાજુ લઈ જવાની ક્રિયા છે.

ઉદાહરણ 2 : ઉકેલ શોધો : $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$

ઉકેલ : બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં,

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

$$\therefore\ (2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$$

$$\therefore\ 10x + 7 = 3x - 28$$

$$\therefore\ 10x - 3x + 7 = -28$$ (3x ને ડા.બા. લઈ જતાં)

$$\therefore\ 7x + 7 = -28$$

$$7x = -28 - 7$$

$$\therefore\ 7x = -35$$

$$\therefore\ x = \frac{-35}{7}$$ અથવા $x = -5$ (ઉકેલ)

સ્વાધ્યાય 2.1

નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો અને જવાબ ચકાસો :

1. $3x = 2x + 18$ **2.** $5t - 3 = 3t - 5$ **3.** $5x + 9 = 5 + 3x$

4. $4z + 3 = 6 + 2z$ **5.** $2x - 1 = 14 - x$ **6.** $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$

7. $x = \frac{4}{5}(x + 10)$ **8.** $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ **9.** $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$

10. $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.3 સમીકરણનું સરળ સ્વરૂપમાં રૂપાંતરણ

ઉદાહરણ 3 : ઉકેલ શોધો : $\frac{6x + 1}{3} + 1 = \frac{x - 3}{6}$

ઉકેલ : બંને બાજુને 6 વડે ગુણતાં

> 6 વડે જ કેમ ? અહીં બંને બાજુ પર રહેલ પદોના છેદનો લ. સા. અ. 6 છે.

$$\frac{6(6x + 1)}{3} + 6 \times 1 = \frac{6(x - 3)}{6}$$

$$\therefore\ 2(6x + 1) + 6 = x - 3$$

$$\therefore\ 12x + 2 + 6 = x - 3$$ (કૌંસ છોડતાં)

$$\therefore\ 12x + 8 = x - 3$$

$$\therefore\ 12x - x + 8 = -3$$

$$\therefore\ 11x + 8 = -3$$

$$\therefore\ 11x = -3 - 8$$

$$\therefore\ 11x = -11$$

$$\therefore\ x = -1$$ (જોઈતું પરિણામ)

ચકાસો : ડા.બા. $\frac{6(-1) + 1}{3} + 1 = \frac{-6 + 1}{3} + 1 = \frac{-5}{3} + \frac{3}{3}$

$$= \frac{-5 + 3}{3} = \frac{-2}{3}$$

જ.બા. $= \frac{(-1) - 3}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

ઉદાહરણ 4 : ઉકેલ શોધો : $5x - 2\ (2x - 7) = 2\ (3x - 1) + \frac{7}{2}$

ઉકેલ : કૌંસને દૂર કરતાં,

ડા.બા. $= 5x - 4x + 14 = x + 14$

જ.બા. $= 6x - 2 + \frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2} + \frac{7}{2} = 6x + \frac{3}{2}$

આમ સમીકરણ, $x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$

$\therefore\ 14 = 6x - x + \frac{3}{2}$

$\therefore\ 14 = 5x + \frac{3}{2}$

$\therefore\ 14 - \frac{3}{2} = 5x$ ($\frac{3}{2}$ ને ડા.બા. લઈ જતાં)

$\therefore\ \frac{28 - 3}{2} = 5x$

$\therefore\ \frac{25}{2} = 5x$

$\therefore\ x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$

શું તમે જોયું કે સમીકરણને આપણે કેવી રીતે સરળ બનાવ્યું ? અહીંયાં, બંને તરફની પદાવલિઓમાં રહેલા પદોના છેદના લ. સા. અ. વડે બંને બાજુનો ગુણાકાર કર્યો.

આમ, $x = \frac{5}{2}$ એ સમીકરણનો જરૂરી ઉકેલ છે.

ચકાસો **:** ડા.બા. $= 5 \times \frac{5}{2} - 2\ (\frac{5}{2} \times 2 - 7)$

$= \frac{25}{2} - 2\ (5 - 7) = \frac{25}{2} - 2(-2)$

$= \frac{25}{2} + 4 = \frac{25 + 8}{2} = \frac{33}{2}$

જ.બા. $= 2(\frac{5}{2} \times 3 - 1) + \frac{7}{2} = 2(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}) + \frac{7}{2}$

$= \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$

$= \frac{26 + 7}{2} = \frac{33}{2} =$ ડા.બા.

ધ્યાન આપો, આ ઉદાહરણમાં આપણે કૌંસને છોડીને બંને બાજુએ રહેલાં સમાન પદોને મેળવીને સમીકરણને સરળ બનાવેલ છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

નીચેનાં સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો :

1. $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$ **2.** $\frac{n}{2} - \frac{3n}{4} + \frac{5n}{6} = 21$ **3.** $x + 7 - \frac{8x}{3} = \frac{17}{6} - \frac{5x}{2}$

4. $\frac{x - 5}{3} = \frac{x - 3}{5}$ **5.** $\frac{3t - 2}{4} - \frac{2t + 3}{3} = \frac{2}{3} - t$ **6.** $m - \frac{m - 1}{2} = 1 - \frac{m - 2}{3}$

સાદુંરૂપ આપી નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો :

7. $3(t - 3) = 5(2t + 1)$

8. $15(y - 4) - 2(y - 9) + 5(y + 6) = 0$

9. $3(5z - 7) - 2(9z - 11) = 4(8z - 13) - 17$

10. $0{\cdot}25(4f - 3) = 0{\cdot}05(10f - 9)$

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. બૈજિક સમીકરણ એ ચલોના ઉપયોગથી બનતી સમતા છે. તે દર્શાવે છે કે સમતાના ચિહ્નની એક બાજુ આવેલ પદાવલિનું મૂલ્ય તેની બીજી બાજુ આવેલ પદાવલિના મૂલ્ય જેટલું જ હોય.

2. ધોર અને માં આપ ે જે સમીકર ોનો અ યાસ કયો તે સમીકર ો એક ચલ સુરેખ સમીકર ો હતાં. આ સમીકર ોમાંની પદાવલિમાં ફ ત એક જ ચલ હતો અને આ સમીકર માં રહેલા ચલની અધિકતમ ાત 1 હતી. તેથી તેઓ એકચલ સુરેખ સમીકર છે.

3. સમીકરણની બંને બાજુએ સુરેખ પદાવલિઓ હોઈ શકે છે. ધોરણ 6 અને 7 માં અભ્યાસ કરેલ સમીકરણમાં કોઈપણ એક બાજુ ફક્ત સંખ્યા હતી.

4. સંખ્યાની જેમ જ ચલને પણ એક બાજુથી બીજી બાજુ તરફ લઈ જઈ શકાય છે.

5. ક્યારેક ઉકેલ લાવતાં પહેલાં, સમીકરણ બનાવવામાં વપરાયેલ પદાવલિઓને તેમના સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવવામાં આવે છે. શરૂઆતમાં અમુક સમીકરણ સુરેખ નથી હોતાં પરંતુ સમીકરણની બંને બાજુઓને યોગ્ય પદાવલિ વડે ગુણીને તેમને સુરેખ સમીકરણમાં બદલી શકાય છે.

[ચતુષ્કોણની સમજ]

GGJUPX

પ્રકરણ

3

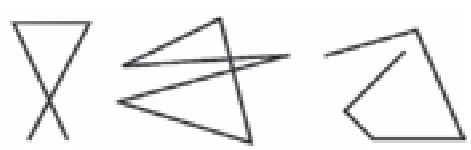
3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે જાણો છો કે કાગળ એક **સમતલની પ્રતિકૃતિ** છે. જ્યારે તમે કાગળ પર પેન્સિલ ઉપાડ્યા વગર તેના પર રહેલાં બિંદુઓને એકબીજાં સાથે જોડો છો (માત્ર એક બિંદુ ના હોય તેવા આકૃતિના કોઇ પણ ભાગને રેખાંકિત કર્યા વગર) ત્યારે તમને **સમતલીય વક્ર** મળે છે.

3.1.1 ા ને ા ા ો

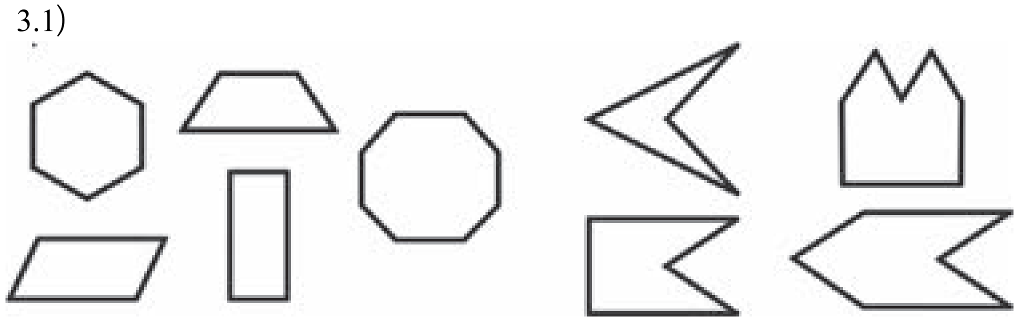
ફક્ત રેખાખંડથી બનતા સાદા બંધ વક્રને બહુકોણ કહે છે.

વક્ર જે બહુકોણ છે



વક્ર જે બહુકોણ નથી

અહીં થોડા બહિર્મુખ (Convex) બહુકોણ અને થોડા અંતર્મુખ (Concave) બહુકોણ આપેલ છે. (આકૃતિ 3.1)



બહિર્મુખ બહુકોણ **અંતર્મુખ બહુકોણ**

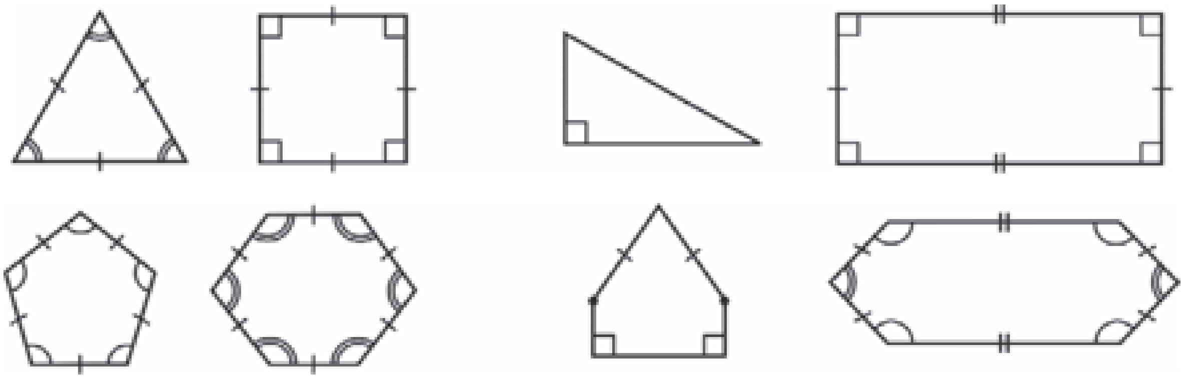
આકૃતિ 3.1

તમે કહી શકો, કે આ પ્રકારના બહુકોણ એકબીજાથી કેવી રીતે અલગ છે ? જે બહુકોણ બહિર્મુખ હોય છે તેમના વિકર્ણનો કોઈપણ ભાગ બહુકોણના બહિર્ભાગમાં હોતો નથી. અથવા બહુકોણના અંતર્ભાગમાં રહેલ બે ભિન્ન બિંદુઓને જોડતો કોઈ એક રેખાખંડ સંપૂર્ણપણે તેના અંતર્ભાગમાં જ હોય છે. શું આ વાક્ય અંતર્મુખ બહુકોણ માટે પણ સત્ય છે ? આપેલ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો. તદુપરાંત પોતાના શબ્દોમાં બહિર્મુખ અને અંતર્મુખ બહુકોણનું વર્ણન કરવાનો પ્રયત્ન કરો અને દરેક પ્રકારના બહુકોણની બે કાચી આકૃતિ દોરો.

આ ધોરણમાં આપણે ફક્ત બહિર્મુખ બહુકોણની જ ચર્ચા કરીશું.

3.1.2 નિયમિત અને અનિયમિત બહુકોણ

એક નિયમિત બહુકોણ સમબાજુ તથા સમકોણીય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ચોરસમાં બાજુના તથા ખૂણાનાં માપ સમાન હોય છે. આથી તે નિયમિત બહુકોણ છે. લંબચોરસ સમકોણીય છે પરંતુ સમબાજુ નથી. તો શું તે નિયમિત બહુકોણ છે ? શું સમબાજુ ત્રિકોણ નિયમિત બહુકોણ છે ? કેમ ?



નિયમિત બહુકોણ **બહુકોણ કે જે નિયમિત નથી**

[**નોંધ :** અથવા ની નિશાની સમાન લંબાઈવાળા રેખાખંડ દર્શાવે છે.]

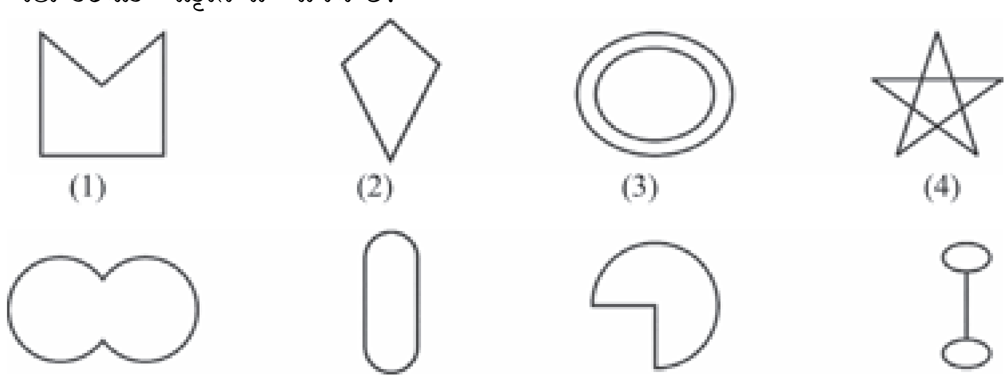
અગાઉના ધોરણમાં તમે એવા કોઈ ચતુષ્કોણનો અભ્યાસ કર્યો છે કે જે સમબાજુ હોય પણ સમકોણ ના હોય ?

અગાઉના ધોરણમાં આવેલ ચતુષ્કોણની આકૃતિઓ યાદ કરો જેવી કે, લંબચોરસ, ચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ વગેરે.

કોઈ એવો ત્રિકોણ છે કે જે સમબાજુ હોય પણ સમકોણ ના હોય ?

સ્વાધ્યાય 3.1

1. અહીં કેટલીક આકૃતિઓ આપેલ છે.



(1) (2) (3) (4)

(5) (6) (7) (8)

પ્રત્યેકનું નીચે દર્શાવેલ આધાર પ્રમાણે વર્ગીકરણ કરો.

(a) સરળ વક્ર (b) સરળ બંધ વક્ર (c) બહુકોણ

(d) બહિર્મુખ બહુકોણ (e) અંતર્મુખ બહુકોણ

2. નિયમિત બહુકોણ એટલે શું ? એવા નિયમિત બહુકોણનાં નામ આપો જેમાં :

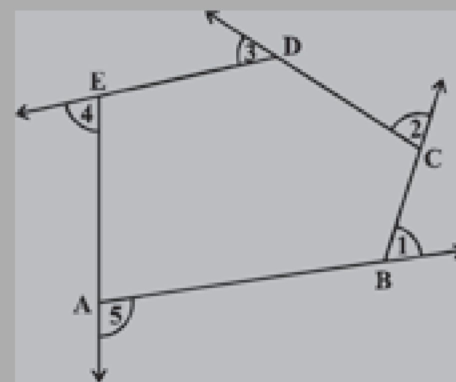
(i) 3 બાજુ હોય (ii) 4 બાજુ હોય (iii) 6 બાજુ હોય

3.2 એક બહુકોણનાં બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો

કેટલાક પ્રસંગોમાં બહિષ્કોણ અંગેનું જ્ઞાન અંતઃકોણ તેમજ બાજુઓના પ્રકાર જાણવામાં મદદરૂપ થાય છે.

આટલું કરો

ચૉકના ટુકડાથી જમીન પર એક બહુકોણ બનાવો. (આકૃતિમાં, એક પંચકોણ ABCDE દર્શાવેલ છે.) (આકૃતિ 3.2). આપણે બધા જ ખૂણાના માપનો સરવાળો જાણવા માંગીએ છીએ, અર્થાત્ $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$. શિરોબિંદુ A થી શરૂઆત કરીને $\overline{AB}$ તરફ ચાલવાનું શરૂ કરો. B પર પહોંચ્યા બાદ, તમારે $m\angle 1$ પર વળવું પડશે જેનાથી તમે $\overline{BC}$ તરફ ચાલી શકશો. C પર પહોંચ્યા બાદ, $\overline{CD}$ તરફ ચાલવા માટે તમારે $m\angle 2$ પરથી વળવું પડશે. આ રીતે, બાજુ AB પર પરત ન ફરો ત્યાં સુધી ચાલવાનું ચાલુ રાખો. આ રીતે તમે એક ચક્કર પૂરું કરશો. આમ, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360^\circ$. ઉપરોક્ત પરિણામ, ગમે તેટલી બાજુઓ ધરાવતા બહુકોણ માટે સત્ય છે. આથી, એક બહુકોણમાં બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો 360° છે.



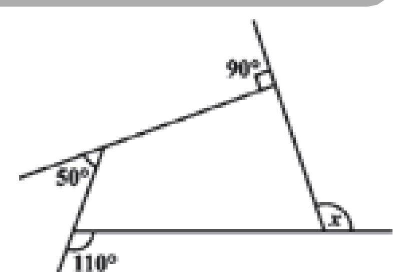
આકૃતિ 3.2

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 3.3માં x નું માપ શોધો :

ઉકેલ : $x + 90^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ (કેમ ?)

$x + 250^\circ = 360^\circ$

$x = 110^\circ$

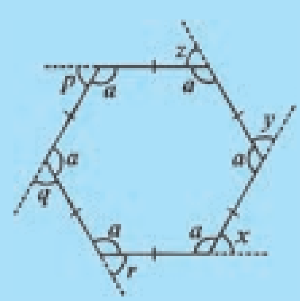


આકૃતિ 3.3

પ્રયત્ન કરો

એક નિયમિત ષટ્કોણ લો (આકૃતિ 3.4).

1. તેના બહિષ્કોણ x, y, z, p, q તથા rનાં માપનો સરવાળો કેટલો છે ?
2. $x = y = z = p = q = r$ છે ? કેમ ?
3. નીચેના પ્રત્યેકનું માપ કેટલું હશે ?
   (i) બહિષ્કોણ (ii) અંતઃકોણ
4. આ પ્રવૃત્તિ નીચે આપેલ સ્થિતિ માટે ફરીથી કરો.
   (i) નિયમિત અષ્ટકોણ (ii) નિયમિત 20-કોણ



આકૃતિ 3.4

ઉદાહરણ 2 : એક નિયમિત બહુકોણના પ્રત્યેક બહિષ્કોણનું માપ 45° હોય તો તેની બાજુઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : બધા જ, બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો $= 360^\circ$

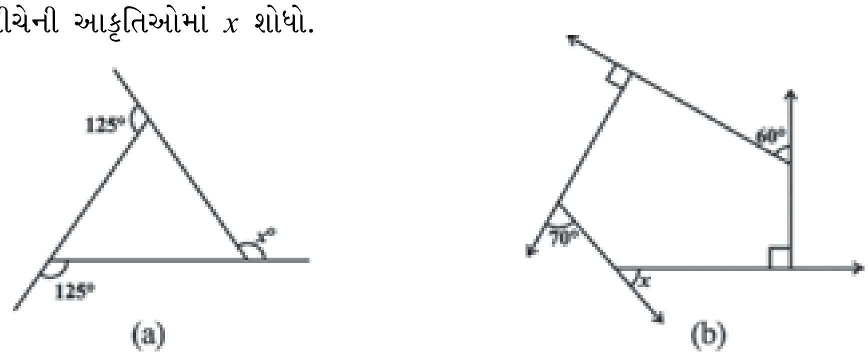
પ્રત્યેક બહિષ્કોણનું માપ $= 45^\circ$

એટલે, બહિષ્કોણની સંખ્યા $= \frac{360}{45} = 8$

આપેલ બહુકોણને 8 બાજુ હશે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેની આકૃતિઓમાં x શોધો.



2. નીચે પ્રમાણેની બાજુઓ ધરાવતા નિયમિત બહુકોણમાં બહિષ્કોણનું માપ શોધો.
(a) 9 બાજુ (b) 15 બાજુ

3. એક નિયમિત બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હોય તો તેના દરેક બહિષ્કોણનું માપ 24° થાય ?

4. એક નિયમિત બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હોય તો તેના દરેક અંતઃકોણનું માપ 165° થાય ?

5. (a) એવો નિયમિત બહુકોણ શક્ય છે કે જેમાં દરેક બહિષ્કોણનું માપ 22° હોય ?
(b) શું આ માપ નિયમિત બહુકોણના અંતઃકોણનું હોઈ શકે ? કેમ ?

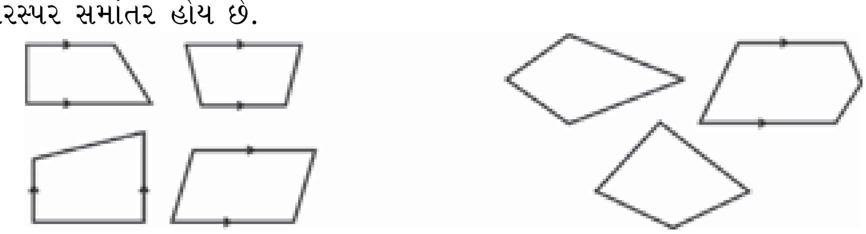
6. (a) નિયમિત બહુકોણમાં અંતઃકોણનું ઓછામાં ઓછું માપ કેટલું હોઈ શકે ? કેમ ?
(b) નિયમિત બહુકોણમાં બહિષ્કોણનું વધુમાં વધુ માપ કેટલું હોઈ શકે ?

3.3 ચતુષ્કોણના પ્રકાર

ચતુષ્કોણની બાજુઓ તથા ખૂણાના પ્રકારના આધારે, તેને નામ આપવામાં આવે છે.

3.3.1 સમલંબ ચતુષ્કોણ (Trapezium)

સમલંબ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે, જેમાં સામસામેની બાજુની ફક્ત એક જ જોડની બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



સમલંબ ચતુષ્કોણ છે **સમલંબ ચતુષ્કોણ નથી**

ઉપરની આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો અને મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો કે, કેમ આમાંથી કેટલાક સમલંબ ચતુષ્કોણ છે જ્યારે બીજા નથી. (**નોંધ :** તીરની નિશાની સમાંતર રેખાઓ દર્શાવે છે.)

આટલું કરો

1. બાજુઓનાં માપ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય તેવા એકરૂપ ત્રિકોણના, એકસરખા ટુકડાઓ લો. તેમને આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો.

આકૃતિ 3.5

અહીં તમને એક સમલંબ ચતુષ્કોણ મળશે. (નિરીક્ષણ કરો!) કઈ બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર છે ? અસમાંતર બાજુઓનું માપ સમાન છે ?

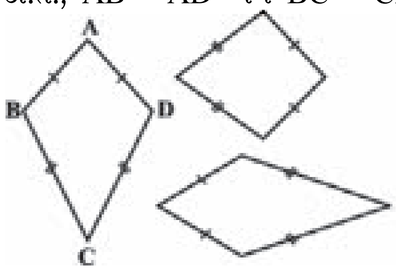
અહીં ઉપયોગમાં લીધેલ એકરૂપ ત્રિકોણના ઉપયોગથી તમને બીજા બે સમલંબ ચતુષ્કોણ મળી શકે છે. તેમને શોધી તેમના આકારની ચર્ચા કરો.

2. તમારા તથા તમારા મિત્રોના ''કંપાસબૉક્સ''(જિઑમેટ્રી બૉક્સ)માંથી ચાર કાટખૂણિયા લો. તેમને અલગ-અલગ સંખ્યામાં ઉપયોગ કરી સાથે-સાથે રાખીને અલગ-અલગ પ્રકારના સમલંબ ચતુષ્કોણ મેળવો.

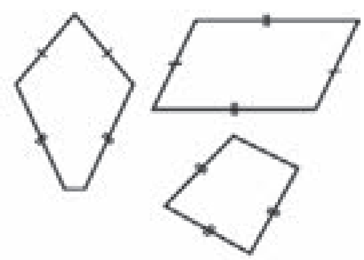
સમલંબ ચતુષ્કોણમાં પરસ્પર સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ જો સમાન લંબાઈની હોય તો તે ચતુષ્કોણને સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ કહે છે. ઉપરોક્ત નિરીક્ષણમાં તમને એક પણ સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ મળ્યો ?

3.3.2 પતંગ (પતંગાકાર ચતુષ્કોણ) (Kite)

પતંગ એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો ચતુષ્કોણ છે. દરેક આકૃતિમાં એકસરખી નિશાનીવાળી બાજુઓની લંબાઈ સમાન છે. દા.ત., AB = AD અને BC = CD.



આ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ છે.



આ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ નથી.

આપેલ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરી અને પતંગાકાર ચતુષ્કોણ વિશે વ ન કરો. જુઓ કે,

(i) પતંગને 4 બાજુઓ હોય છે (તે ચતુષ્કોણ છે).

(ii) તેમાં સમાન લંબાઈવાળી પાસ-પાસેની બાજુની બે અલગ-અલગ જોડ હોય છે.

ચોરસને પતંગ કહી શકાય કે નહીં તે ચકાસો.

આટલું કરો

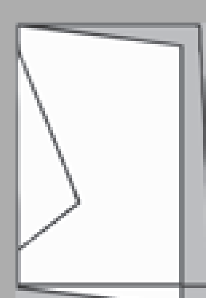
એક જાડો કાગળ લો. તેને વચ્ચેથી વાળો.

આકૃતિ 3.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે અલગ-અલગ લંબાઈના બે રેખાખંડ દોરો.

આ રેખાખંડને કાપી અને કાગળને ખોલો.

તમને એક પતંગનો આકાર મળશે. (આકૃતિ 3.7)

પતંગમાં કોઈ સંમિત રેખા છે ?



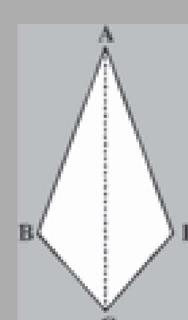
આકૃતિ 3.6

અહીં બતાવો કે ΔABC અને ΔADC એકરૂપ છે. તમે આમાંથી શું તારણ કાઢશો ?

પતંગના બંને વિકર્ણ પર ગડી વાળો. હવે આ વિકર્ણ કાટખૂણે છેદે છે કે નહીં તે કાટખૂણિયાની મદદથી ચકાસો. શું આ વિકર્ણની લંબાઈ સમાન છે ? વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે છે કે નહીં તે ચકાસો. (કાગળની ગડી વાળીને અથવા માપીને) પતંગના એક ખૂણાને, વિકર્ણની વિપરીત દિશામાં વાળીને સમાન માપના ખૂણા ચકાસો.

વિકર્ણ પર પડેલ ગડીનું નિરીક્ષણ કરો, શું તે એમ દર્શાવે છે કે વિકર્ણ એક ખૂણાનો દ્વિભાજક છે ?

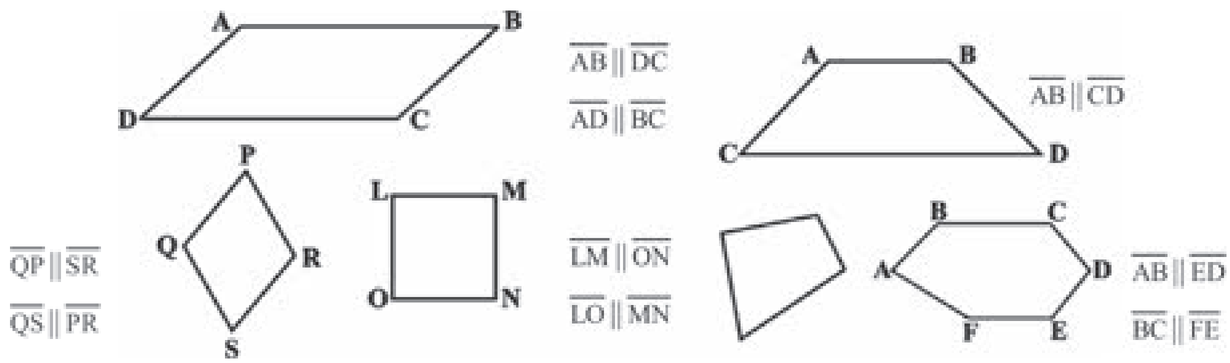
તમારાં અવલોકનો તમારા મિત્રોને જણાવો અને તેની સૂચિ બનાવો. આ પરિણામોનો સારાંશ આ પ્રકરણમાં કોઈ એક જગ્યાએ આપેલ છે.



આકૃતિ 3.7

3.3.3 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (Parallelogram)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક ચતુષ્કોણ છે. તેના નામ પ્રમાણે તેનો સંબંધ સમાંતર રેખાઓ સાથે છે.



સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.**

આ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો અને પોતાના શબ્દોમાં બતાવવાનો પ્રયત્ન કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કોને કહેવાય ? તમારું નિરીક્ષણ તમારા મિત્રોને જણાવો.
લંબચોરસને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહી શકાય કે નહીં તે ચકાસો.

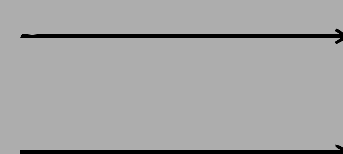
આટલું કરો

પૂંઠાની બે અલગ-અલગ પહોળાઈવાળી લંબચોરસ પટ્ટીઓ લો. (આકૃતિ 3.8)

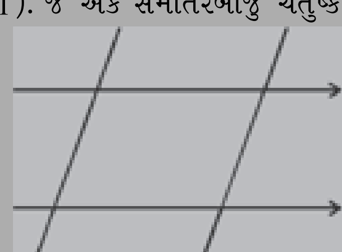
પટ્ટી-1 **પટ્ટી-2**

આકૃતિ 3.8

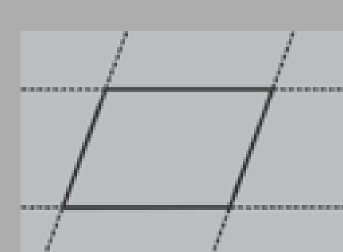
એક પૂંઠાની પટ્ટીને સમક્ષિતિજ રાખીને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે તેની લંબાઈની દિશામાં બે રેખા દોરો (આકૃતિ 3.9).
હવે બીજી પટ્ટીને દોરેલી રેખાઓ ઉપર ત્રાંસી રાખીને આ જ પ્રમાણે બીજી બે રેખા દોરો (આકૃતિ 3 1).
આ ચાર રેખા વડે બનતી બંધ આકૃતિ ચતુષ્કોણ છે. આ પરસ્પર સમાંતર રેખાની બે જોડ દ્વારા બનેલ છે (આકૃતિ 3.11). જે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 3.9



આકૃતિ 3.10



આકૃતિ 3.11

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે જેમાં સામસામેની બાજુની દરેક જોડ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

3.3.4 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં અંગો (ements o a Para e o ram)

આકૃતિ 3.12

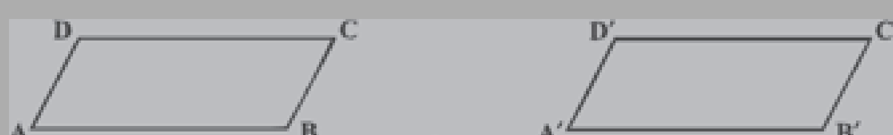
એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને ચાર બાજુ અને ચાર ખૂણા હોય છે. આમાંથી અમુક સમાન માપના હોય છે. આ અંગોને સંબંધિત કેટલાક શબ્દો તમારે યાદ રાખવા પડશે.

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD આપેલ છે (આકૃતિ 3.12). $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ તેની **સામસામેની બાજુ** છે. $\overline{AD}$ તથા $\overline{BC}$ સામસામેની બાજુની બીજી જોડ બનાવે છે. $\angle A$ તથા $\angle C$ **સામસામેના ખૂણા**ની એક જોડ છે અને આ પ્રકારે $\angle B$ તથા $\angle D$ સામસામેના ખૂણાની બીજી એક જોડ છે.

$\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$ **પાસપાસેની બાજુ** છે અર્થાત્ એક બાજુના અંત્યબિંદુથી બીજી બાજુની શરૂઆત થાય છે. શું $\overline{BC}$ અને $\overline{CD}$ પણ પાસપાસેની બાજુ છે? બીજી બે પાસપાસેની બાજુની જોડ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. $\angle A$ અને $\angle B$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **પાસપાસેના ખૂણા** છે. આ ખૂણાઓ કોઈ એક બાજુનાં અંત્યબિંદુઓ પર બનેલા હોય છે. $\angle B$ તથા $\angle C$ પણ પાસપાસેના ખૂણા છે. આવી બીજી પાસ પાસેના ખૂણાની જોડને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં ઓળખવાનો પ્રયત્ન કરો.

આટલું કરો

એકરૂપ હોય તેવા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ટુકડાઓ ABCD તથા A′B′C′D′ લો (આકૃતિ 3.13).



આકૃતિ 3.13

અહીં $\overline{AB}$ અને $\overline{A'B'}$ સમાન છે, પરંતુ તેમના નામ અલગ છે. આવી જ રીતે બીજી સંગત બાજુની જોડ પણ સમાન માપની હશે.

હવે $\overline{A'B'}$ ને $\overline{DC}$ પર મૂકો. શું તે સુસંગત છે ? હવે તમે $\overline{AB}$ અને $\overline{DC}$ ની લંબાઈ વિશે શું કહેશો ?

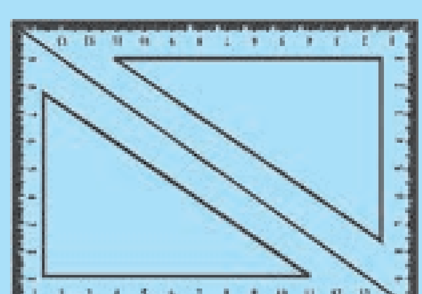
આ જ પ્રમાણે $\overline{AD}$ અને $\overline{BC}$ ની લંબાઈનું નિરીક્ષણ કરો. તમને શું જોવા મળ્યું ?

આ જ પરિણામ તમને $\overline{AB}$ અને $\overline{DC}$ ની લંબાઈ માપીને પણ મળી શકશે.

ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે.

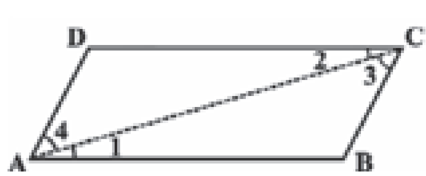
પ્રયત્ન કરો

30°–60°–90°ના ખૂણા ધરાવતા બે કાટખૂણિયા લો. હવે તેમને એ પ્રમાણે ગોઠવો કે જેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બને (આકૃતિ 3.14). શું આ પ્રવૃત્તિ તમને ઉપરોક્ત ગુણધર્મને ચકાસવામાં મદદ કરશે ?


આકૃતિ 3.14

તમે આ ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પણ પ્રભાવશાળી બનાવી શકો છો.

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD લો (આકૃતિ 3.15). તેનો વિકર્ણ $\overline{AC}$ દોરો. આપણે જોઈએ છીએ કે $\angle 1 = \angle 2$ અને $\angle 3 = \angle 4$ (કેમ ?)



આકૃતિ 3.15

હવે ત્રિકોણ ABC અને ADCમાં, $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ અને $\overline{AC}$ સામાન્ય બાજુ છે. તેથી એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ખૂ ો બાજુ ખૂ ો) (ASA ng e ide ng e) શરત દ્વારા $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (અહીં ખૂબાખૂ શરતનો ઉપયોગ કેવી રીતે થયો ?)

એટલે, AB = DC અને BC = AD

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 3.16 માં દર્શાવેલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSની પરિમિતિ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુનું માપ સમાન હોય છે.

એટલે, PQ = SR = 12 સેમી

અને QR = PS = 7 સેમી

$\therefore$ પરિમિતિ = PQ + QR + RS + SP

= 12 સેમી + 7 સેમી + 12 સેમી + 7 સેમી

= 38 સેમી

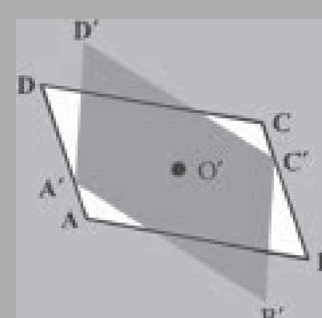
આકૃતિ 3.16

3.3.5 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ (n es o a Para e o ram)

આપણે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુનાં માપ સંબંધિત ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યો. હવે ખૂણાઓ વિશે શું કહી શકાય ?

આટલું કરો

ધારો કે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD છે (આકૃતિ 3.17) 'ટ્રેસિંગ' કાગળ પર આની એક નકલ A′B′C′D′ દોરો. હવે A′B′C′D′ને ચતુષ્કોણ ABCD પર મૂકો. ચતુષ્કોણના વિકર્ણના છેદબિંદુ પર એક ટાંકણી લગાવો. હવે 'ટ્રેસિંગ' કાગળને 180°ના ખૂણો બનાવે તે રીતે ફેરવો. આ ચતુષ્કોણ હજુ પણ એકબીજાને સુસંગત હશે, પરંતુ હવે તમે જોશો કે બિંદુ A′, બિંદુ C પર તથા તે જ રીતે બિંદુ B′, બિંદુ D પર હશે.



આકૃતિ 3.17

ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિ દ્વારા તમને ખૂણા $\angle A$ તથા ખૂણા $\angle C$ના માપ વિશે કાંઈ જાણકારી પ્રાપ્ત થઈ ? આ જ રીતે $\angle B$ તથા $\angle D$ના માપની જાણકારી મેળવો અને તમારું તારણ જણાવો.

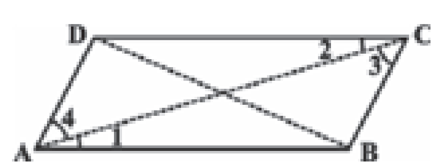
ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણાનાં માપ સમાન હોય છે.

પ્રયત્ન કરો

30°–60°–90°ના માપ ધરાવતાં બે કાટખૂણિયા લઈને અગાઉની જેમ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બનાવો. શું આ રીતે બનેલ આકૃતિ ઉપરોક્ત ગુણધર્મની પુષ્ટિ કરે છે ?

ઉપરોક્ત ગુણધર્મને તમે તાર્કિક દલીલો દ્વારા પણ પુરવાર કરી શકો છો.

જો $\overline{AC}$ અને $\overline{BD}$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ હોય (આકૃતિ 3.18) તો તમને $\angle 1 = \angle 2$, અને $\angle 3 = \angle 4$ મળે (કેમ ?)



આકૃતિ 3.18

ΔABC અને ΔADC (આકૃતિ 3.19)નો અલગ-અલગ અભ્યાસ કરતાં તમે જોઈ શકો છો કે એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરત પ્રમાણે,

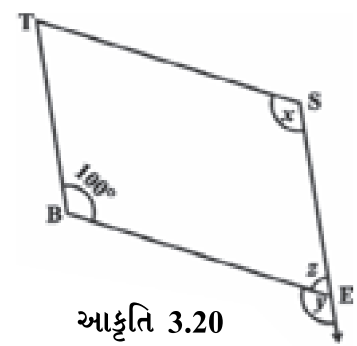
$$\Delta ABC \cong \Delta CDA \text{ (કેવી રીતે ?)}$$

આકૃતિ 3.19

આ દર્શાવે છે કે $\angle B$ અને $\angle D$ નાં માપ સમાન છે.

આ જ પ્રમાણે તમે મેળવી શકો છો કે $m\angle A = m\angle C$.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 3.20 માં, BEST એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. x, y, z નાં મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 3.20

ઉકેલ : બિંદુ S, બિંદુ Bની સામે છે.

તેથી $x = 100^\circ$ (સામેના ખૂણાનો ગુણધર્મ)

$y = 100^\circ$ ($\angle x$ નો અનુકોણ)

$z = 80^\circ$ ($\angle y$ અને $\angle z$ રૈખિક જોડ બનાવે છે.)

હવે આપણે આપણું ધ્યાન સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણાઓ ઉપર કેન્દ્રિત કરીએ. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD (આકૃતિ 3.21) માં, $\angle A$ અને $\angle D$, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ની છેદિકા $\overline{DA}$ થી બનતા છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ હોવાથી તે એકબીજાના પૂરકકોણ છે.

આકૃતિ 3.21

$\angle A$ અને $\angle B$ પણ એકબીજાના પૂરકકોણ છે. કેમ ?

$\angle A$ અને $\angle B$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ની છેદિકા $\overline{BA}$ થી બનતા છેદિકાની એકતરફના અંતઃકોણ છે.

આકૃતિ પરથી પૂરકકોણની આવી બીજી બે જોડ શોધો.

ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેના ખૂણા એકબીજાના પૂરક હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ RING(આકૃતિ 3.22)માં, જો $m\angle R = 70^\circ$ હોય તો બીજા ખૂણાનાં માપ શોધો.

આકૃતિ 3.22

ઉકેલ : અહીં $m\angle R = 70^\circ$ આપેલ છે.

આથી $m\angle N = 70^\circ$ થાય.

કારણ કે, $\angle R$ અને $\angle N$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા છે.

હવે $\angle R$ અને $\angle I$ એકબીજાના પૂરકકોણ હોવાથી $m\angle I = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

અને $m\angle G = 110^\circ$, $\angle G$ અને $\angle I$ સામસામેના ખૂણા હોવાથી

આથી, $m\angle R = m\angle N = 70^\circ$ અને $m\angle I = m\angle G = 110^\circ$

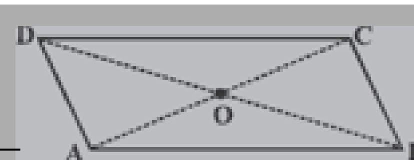
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

$m\angle R = m\angle N = 70^\circ$ દર્શાવ્યા બાદ, બીજી કોઈ રીતે $m\angle I$ અને $m\angle G$ નું માપ શોધી શકાય ?

3.3.6 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ (ia ona s o a Para e o ram)

સામાન્ય રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણના માપ સમાન હોતા નથી. (શું તમે આ તમારી અગાઉની પ્રવૃત્તિઓમાં ચકાસ્યું ?) છતાં પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ ધરાવે છે.

આટલું કરો



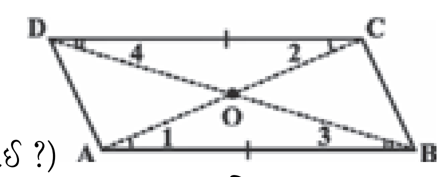
આકૃતિ 3.23

સમાંતરબાજુ ચતુ કો નો એક કાપેલો ટૂક ો તેને C કહો (આકૃતિ 3 23). તેના વિક C અને એકબી ને બિંદુ માં છેદે છે.

બિંદુ C, બિંદુ A પર આવે તે રીતે ગડી વાળીને $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ શોધો. શું આ મધ્યબિંદુ, બિંદુ O છે ?

શું આ બતાવે છે કે વિકર્ણ $\overline{DB}$, વિકર્ણ $\overline{AC}$ ને બિંદુ Oમાં દુભાગે છે ? તમારા મિત્રો સાથે આની ચર્ચા કરો અને $\overline{DB}$ નું મધ્યબિંદુ ક્યાં મળશે તે શોધવા આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો.

ગુણધર્મ : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાને (તેમના છેદબિંદુમાં જ) દુભાગે છે.*



આકૃતિ 3.24

ઉપરોક્ત ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પુરવાર કરવો મુશ્કેલ નથી. આકૃતિ 3.24 માં એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરતનો ઉપયોગ કરવાથી આપણે જોઈ શકીએ કે

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (અહીં ખૂબાખૂ શરત કેવી રીતે ઉપયોગી થઈ ?)

તેથી $AO = CO$ અને $BO = DO$.

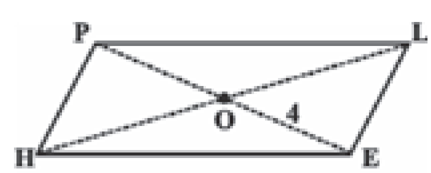
ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 3.25 માં, HELP એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે (લંબાઈ સેમીમાં આપેલ છે). અહીં $OE = 4$ અને HL, PE કરતાં 5 વધારે છે. તો OH શોધો.

ઉકેલ : જો, $OE = 4$ હોય તો $OP = 4$ (કેમ ?)

તેથી, $PE = 8$ (કેમ ?)

આથી, $HL = 8 + 5 = 13$

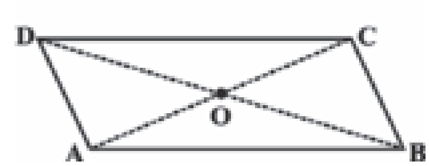
માટે, $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ (સેમી)



આકૃતિ 3.25

સ્વાધ્યાય 3.3

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD આપેલ છે. દરેક વિધાનને તેમાં ઉપયોગ કરવામાં આવેલ વ્યાખ્યા અથવા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને પૂરું કરો.

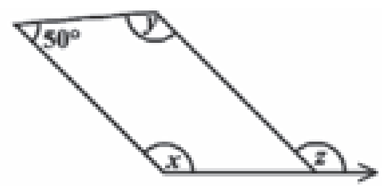


(i) $AD = ...$ (ii) $\angle DCB = ...$

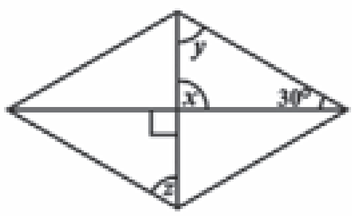
(iii) $OC = ...$ (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA = ...$

2. નીચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.

(i)

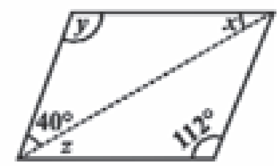


(ii)



(iii)

(iv)



(v)

3. શું ચતુષ્કોણ ABCD, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થઈ શકે, જો ....

(i) $\angle D + \angle B = 180^\circ$?

(ii) AB = DC = 8 સેમી, AD = 4 સેમી અને BC = 4.4 સેમી ?

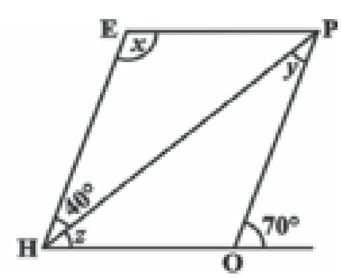
(iii) $\angle A = 70^\circ$ અને $\angle C = 65^\circ$?

4. એક એવા ચતુષ્કોણની કાચી (Rough) આકૃતિ દોરો કે જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ના હોય પરંતુ તેમાં સામસામેના ખૂણાની એક જોડ સમાન હોય.

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં બે પાસપાસેના ખૂણાના માપનો ગુણોત્તર 3:2 છે, તો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાના માપ શોધો.

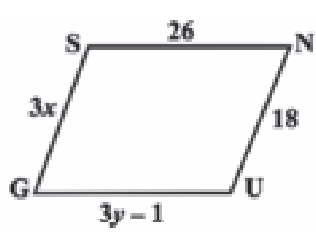
6. એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણાની એક જોડના ખૂણાના માપ સમાન છે. તો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાના માપ શોધો.

7. આકૃતિમાં એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ HOPE દર્શાવેલ છે. x, y, z ખૂણાના માપ શોધો. ખૂણો શોધવા કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કર્યો છે તે જણાવો.

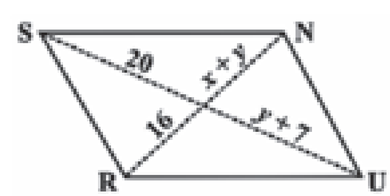


8. નીચેની આકૃતિ GUNS અને RUNS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. x અને y શોધો. (લંબાઈ સેમીમાં છે.)

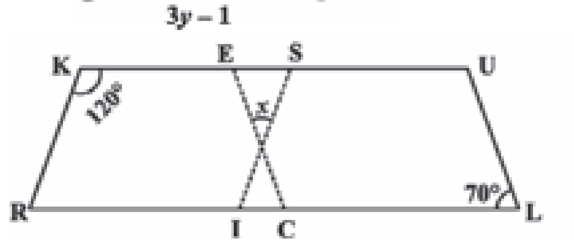
(i)



(ii)

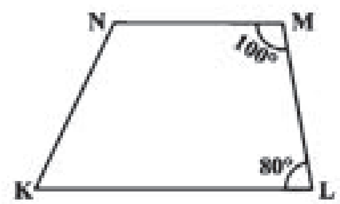


9.

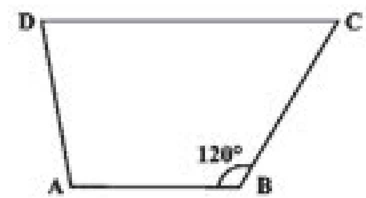


ઉપરની આકૃતિમાં RISK અને CLUE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, તો x શોધો.

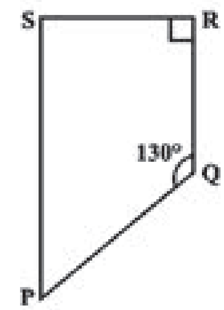
10. નીચેની આકૃતિ સમલંબ ચતુષ્કોણ કેવી રીતે છે, તે સમજાવો. કઈ બે બાજુ પરસ્પર સમાંતર છે ? (આકૃતિ 3.26)



આકૃતિ 3.26



આકૃતિ 3.27



આકૃતિ 3.28

11. આકૃતિ 3.27 માં, જો $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ હોય, તો $m\angle C$ શોધો.

12. આકૃતિ 3.28 માં, જો $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ હોય, તો $\angle P$ અને $\angle S$નું માપ શોધો. (જો તમે $m\angle R$ શોધતા હોય, તો શું, $m\angle P$ શોધવાની અન્ય પદ્ધતિઓ હશે ?)

4YP7HF

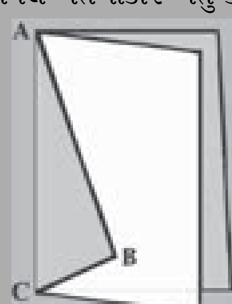
3.4 વિશિષ્ટ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

3.4.1 સમબાજુ ચતુષ્કોણ (Rhombus)

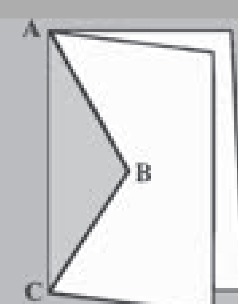
પતંગાકાર ચતુષ્કોણ (જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી) એક વિશેષ સ્થિતિમાં આપણને સમબાજુ ચતુષ્કોણ (તમે જોશો, કે તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હશે) મળે છે.

આટલું કરો

તમે પોતે બનાવેલ પતંગાકાર ચતુષ્કોણને યાદ કરો.



પતંગ-કાપ



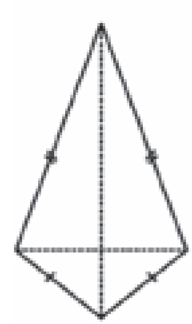
સમબાજુ ચતુષ્કોણ-કાપ

જ્યારે તમે ABCની દિશામાં કાગળને કાપીને ખોલો છો ત્યારે તમને પતંગાકાર ચતુષ્કોણ મળે છે. અહીં AB અને BCની લંબાઈ અલગ-અલગ છે. હવે જો તમે AB = BC દોરો, તો મળેલ પતંગાકાર ચતુષ્કોણને, સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહેવાય.

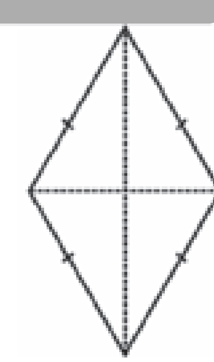
ધ્યાન રાખો, સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે, પરંતુ પતંગાકાર ચતુષ્કોણમાં આ આવશ્યક નથી.

સમબાજુ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે કે જેમાં બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે.

હવે, સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોવાથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ થાય. **તેથી સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને પતંગ બંનેના બધા જ ગુણધર્મ ધરાવે છે.** તેમની યાદી બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્યાર બાદ, તમે બનાવેલ યાદીને આ પુસ્તકમાં આપેલ યાદી સાથે સરખાવો.



પતંગાકાર ચતુષ્કોણ



સમબાજુ ચતુષ્કોણ

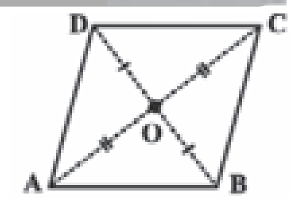
સમબાજુ ચતુષ્કોણનો સૌથી અગત્યનો ગુણધર્મ તેના વિકર્ણ વિશે છે.

ગુણધર્મ : *સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.*

આટલું કરો

સમબાજુ ચતુષ્કોણની કાગળની એક પ્રતિકૃતિ લો. હવે આ કાગળની ગડી વાળી અને ચકાસો કે બે વિકર્ણનું છેદબિંદુ એ જ તેમનું મધ્યબિંદુ છે કાટખૂણિયાનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો કે બે વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે.

અહીં આ ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પુરવાર કરતું એક રેખાચિત્ર આપેલ છે. ABCD એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ (આકૃતિ 3.29) છે. તેથી, તે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ છે. તેના વિકર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે. માટે, OA = OC અને OB = OD થાય. અહીં, $m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$ સાબિત કરવાનું છે.



આકૃતિ 3.29

એકરૂપતાની બાબાબા (બાજુ બાજુ બાજુ) (SSS ide ide ide) શરતને આધારે

અહીં AO = CO (કેમ ?)
AD = CD (કેમ ?)
OD = OD

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

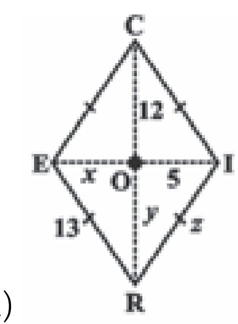
માટે $m\angle AOD = m\angle COD$

હવે $\angle AOD$ અને $\angle COD$, રૈખિક જોડના ખૂણા હોવાથી,

$m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$

ઉદાહરણ 7 :

RICE સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે (આકૃતિ 3.30). x, y, z શોધો અને તેની સત્યાર્થતા પુરવાર કરો.



આકૃતિ 3.30

ઉકેલ :

x = OE	y = OR	z = સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુ છે
= OI (વિકર્ણ દુભાગે છે)	= OC (વિકર્ણ દુભાગે છે)	= 13 (બધી બાજુઓ સમાન હોય)
= 5	= 12	

3.4.2 લંબચોરસ (Rectangle)

લંબચોરસ એક સમાન માપના ખૂણા ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે (આકૃતિ 3.31).

આકૃતિ 3.31

ઉપરની વ્યાખ્યાનો અર્થ શું થાય ? તમારા મિત્રો જોડે ચર્ચા કરો.

હવે જો, લંબચોરસના બધા જ ખૂણાના માપ સમાન હોય તો દરેક ખૂણાનું માપ કેટલું હશે ?

ધારો કે દરેક ખૂણાનું માપ x° છે.

તેથી, $4x^\circ = 360^\circ$ (કેમ ?)

$\therefore x^\circ = 90^\circ$

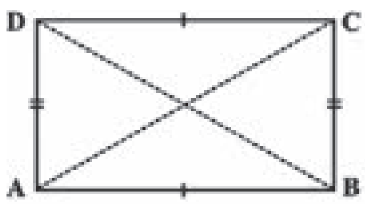
તેથી, લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

આમ લંબચોરસ, એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. જેના બધા જ ખૂણા કાટખૂણા હોય છે.

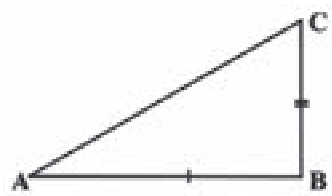
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાને લીધે લંબચોરસની સામસામેની બાજુઓ સમાન લંબાઈની હોય છે તથા તેના વિકર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.

લંબચોરસમાં વિકર્ણની લંબાઈ અસમાન હોઈ શકે ? (ચકાસો); તમને આશ્ચર્ય થશે કે લંબચોરસ(વિશેષ હોવાથી)ના વિકર્ણ સમાન લંબાઈના હોય છે.

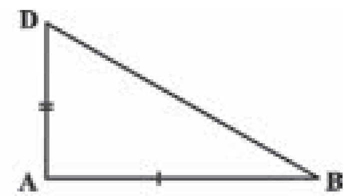
ગુણધર્મ : લંબચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય છે.



આકૃતિ 3.32



આકૃતિ 3.33



આકૃતિ 3.34

આ પુરવાર કરવું એકદમ સરળ છે. જો ABCD લંબચોરસ હોય (આકૃતિ 3.32) અને તેમાં બનતા ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ ABD (અનુક્રમે આકૃતિ 3.33 અને 3.34)નું અલગ-અલગ નિરીક્ષણ કરતાં આપણને

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ મળે

કારણ કે,	$AB = AB$	(સામાન્ય બાજુ)
	$BC = AD$	(કેમ ?)
	$m\angle A = m\angle B = 90^{\circ}$	(કેમ ?)

આ એકરૂપતા બાખૂબા (બાજુ ખૂ ો બાજુ)(SAS ide ng e ide) શરતને અનુસરે છે.

તેથી $AC = BD$

અને લંબચોરસમાં વિકર્ણ સમાન લંબાઈના હોવા ઉપરાંત એકબીજાને દુભાગે પણ છે. (કેમ ?)

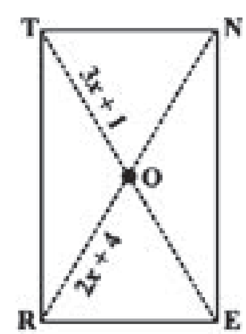
ઉદાહરણ 8 : RENT, લંબચોરસ છે. તેના વિકર્ણ પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. જો $OR = 2x + 4$ અને $OT = 3x + 1$ હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : $\overline{OT}$ ની લંબાઈ, વિકર્ણ $\overline{TE}$ ની લંબાઈથી અર્ધી છે અને $\overline{OR}$ ની લંબાઈ, વિકર્ણ $\overline{RN}$ કરતાં અર્ધી છે. બંને વિકર્ણની લંબાઈ સમાન છે. (કેમ ?)

તેથી, તેમના અર્ધા ભાગ પણ સમાન લંબાઈના થાય.

માટે, $3x + 1 = 2x + 4$

$\therefore \quad x = 3$



આકૃતિ 3.35

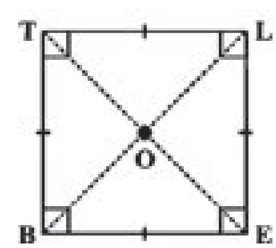
3.4.3 ચોરસ (Square)

ચોરસ, એક સમાન લંબાઈવાળી બાજુ ધરાવતો લંબચોરસ છે.

આમ ચોરસ, લંબચોરસના બધા જ ગુણધર્મો ધરાવે છે તેમજ બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોવાનો એક વધારાનો ગુણધર્મ પણ ધરાવે છે.

લંબચોરસની જેમ જ ચોરસના વિકર્ણ પણ સમાન લંબાઈના હોય છે.

લંબચોરસના વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે હોય તે જરૂરી નથી. (ચકાસો)



BELT એક ચોરસ છે.

$BE = EL = LT = TB$

$\angle B$, $\angle E$, $\angle L$, $\angle T$ કાટખૂણા છે.

$BL = ET$ અને $\overline{BL} \perp \overline{ET}$ છે.

$OB = OL$ અને $OE = OT$.

કોઈ પણ ચોરસમાં વિકર્ણ

(i) પરસ્પર દુભાગે. (ચોરસ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી)

(ii) સમાન લંબાઈના હોય. (ચોરસ એક લંબચોરસ હોવાથી)

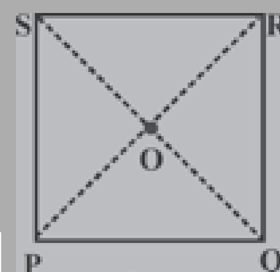
(iii) પરસ્પર લંબ હોય.

તેથી આપણને નીચે પ્રમાણેનો ગુણધર્મ મળે.

ગુણધર્મ : *ચોરસના વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.*

આટલું કરો

એક ચોરસ ટુકડો PQRS લો (આકૃતિ 3.36). તેના વિકર્ણ પરથી તેની ગડી વાળો. શું બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ એક જ છે ? કાટખૂણિયાની મદદથી ખૂણા O નું માપ 90° છે કે નહીં તે ચકાસો. આ ઉપરોક્ત ગુણધર્મને સાબિત કરે છે.



આકૃતિ 3.36

આ ગુણધર્મને આપણે તાર્કિક દલીલો દ્વારા પણ સાબિત કરી શકીએ : ચોરસ ABCD ના વિકર્ણ પરસ્પર બિંદુ Oમાં છેદે છે (આકૃતિ 3.37).

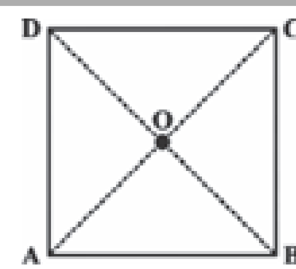
OA = OC (ચોરસ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી)

એકરૂપતાની બાબાબા શરત પ્રમાણે આપણને,

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (કેમ ?)

માટે $m\angle AOD = m\angle COD$

આ ખૂણાઓ રૈખિક જોડના હોવાથી દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 3.37

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેનાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો.

(a) દરેક લંબચોરસ ચોરસ છે.

(b) દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(c) દરેક ચોરસ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે તેમજ લંબચોરસ પણ છે.

(d) દરેક ચોરસ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

(e) દરેક પતંગાકાર ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(f) દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ છે.

(g) દરેક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

(h) દરેક ચોરસ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

2. એવા ચતુષ્કોણનાં નામ આપો કે જેમાં :

(a) ચારેય બાજુની લંબાઈ સમાન હોય. (b) ચાર કાટખૂણા હોય.

3. કેવી રીતે એક ચોરસ એ

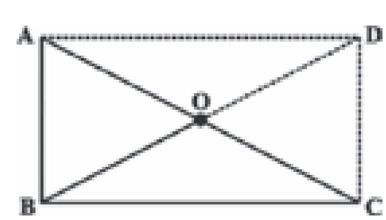
(i) ચતુષ્કોણ (ii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (iv) લંબચોરસ છે તે વિગતવાર સમજાવો.

4. નીચે દર્શાવ્યા મુજબ વિકર્ણ ધરાવતાં ચતુષ્કોણનાં નામ આપો.

(i) પરસ્પર દુભાગે (ii) પરસ્પરના લંબદ્વિભાજક હોય (iii) સમાન હોય

5. લંબચોરસ એક બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ છે, સમજાવો.

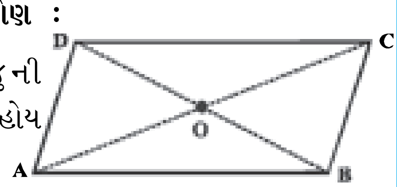
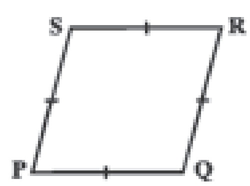
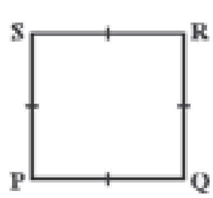
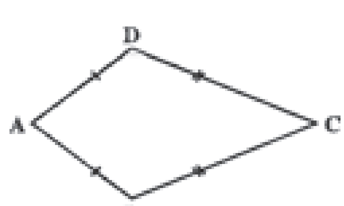
6. કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં કાટખૂણાની સામેની બાજુનું મધ્યબિંદુ O છે. શિરોબિંદુઓ A, B અને Cથી બિંદુ O કેવી રીતે સમાન અંતરે આવે છે તે સમજાવો. (અહીં તૂટક રેખાઓ તમારી સહાયતા માટે દોરેલ છે.)



વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કડિયો કોંક્રિટનો એક 'સ્લેબ' બનાવે છે. તે તેને લંબચોરસ બનાવવા માંગે છે. કેટલા અલગ-અલગ પ્રકારથી, તે આ 'સ્લેબ' લંબચોરસ જ છે તેવી ચકાસણી કરી શકશે ?
2. સમાન લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા લંબચોરસ તરીકે ચોરસને વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યો હતો. આપણે તેને સમાન ખૂણા ધરાવતાં સમબાજુ ચતુષ્કોણ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ ? સ્પષ્ટતા કરો.
3. સમલંબ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણા સમાન હોઈ શકે ? તેની દરેક બાજુઓ સમાન હોઈ શકે ? સ્પષ્ટતા કરો.

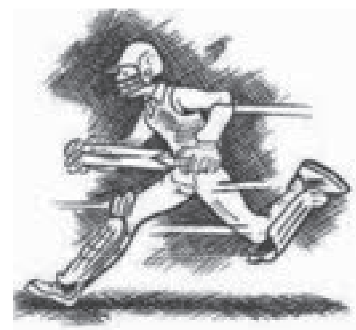
આપણે શું ચર્ચા કરી ?

ચતુષ્કોણ	ગુણધર્મ
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ : સામસામેની બાજુની પ્રત્યેક જોડ સમાંતર હોય તેવો ચતુષ્કોણ. 	(1) સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોય. (2) સામસામેનાં ખૂણાનાં માપ સમાન હોય. (3) વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે.
સમબાજુ ચતુષ્કોણ : સમાન લંબાઈની બાજુ ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ. 	(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો. (2) વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે.
લંબચોરસ : કાટકોણ ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ 	(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો. (2) દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય. (3) વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય.
ચોરસ : સમાન લંબાઈની બાજુ ધરાવતો લંબચોરસ. 	સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસના બધા જ ગુણધર્મો.
પતંગાકાર ચતુષ્કોણ : પાસપાસેની બાજુઓની ફક્ત બે જોડ સમાન લંબાઈની હોય તેવો ચતુષ્કોણ. 	(1) વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે હોય. (2) કોઈ એક વિક , બી વિક ને દુભાગે. (3) આપેલ આકૃતિમાં $m\angle B = m\angle D$ પણ $m\angle A \neq m\angle C$

પ્રકરણ 4

માહિતીનું નિયમન

GT7Z85



4.1 માહિતી (ata)

તમારાં રોજબરોજનાં જીવનમાં તમને ઘણી બધી માહિતી મળે છે. જેમ કે,

(a) છેલ્લી 10 ક્રિકેટ ટેસ્ટ મેચમાં બૅટ્સમેને બનાવેલ રન.

(b) છેલ્લી 10 વન-ડે ક્રિકેટ મેચમાં બૉલરે લીધેલી વિકેટો.

(c) તમારા વર્ગમાં ગણિતની એકમ કસોટીમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ.

(d) તમારા દરેક મિત્રએ વાંચેલી વાર્તાની ચોપડીઓની સંખ્યા વગેરે.

ઉપરોક્ત કિસ્સાઓ જેવા અનેક કિસ્સામાં એકત્રિત કરાતી વિગતને માહિતી (Data) કહેવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે આપણે જે પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરવાનો હોય તેને સંગત માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ વર્ગશિક્ષક તેના વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનું સરેરાશ માપ શોધવા માગે છે તો તેણે સૌ પ્રથમ પોતાના વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનાં માપ લખવાં જોઈએ અને સુવ્યવસ્થિત રીતે વર્ગીકરણ કરવું જોઈએ. ત્યાર બાદ તેનું અર્થઘટન કરવું જોઈએ.

કેટલીક વખત 'માહિતી'નો સ્પષ્ટ ચિતાર મેળવવા તેને **આલેખ સ્વરૂપે** દર્શાવવામાં આવે છે. તમે અગાઉનાં વર્ષોમાં વિવિધ પ્રકારના આલેખ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે શું તમે તે યાદ કરી શકશો ?

1. **ચિત્ર આલેખ :** આપેલી 'માહિતી'ને સંકેતનો ઉપયોગ કરીને કરવામાં આવતી ચિત્રાત્મક રજુઆત એટલે ચિત્ર આલેખ (Pictograph).

ઉદાહરણ : નીચેનું દૃષ્ટાંત જુઓ :

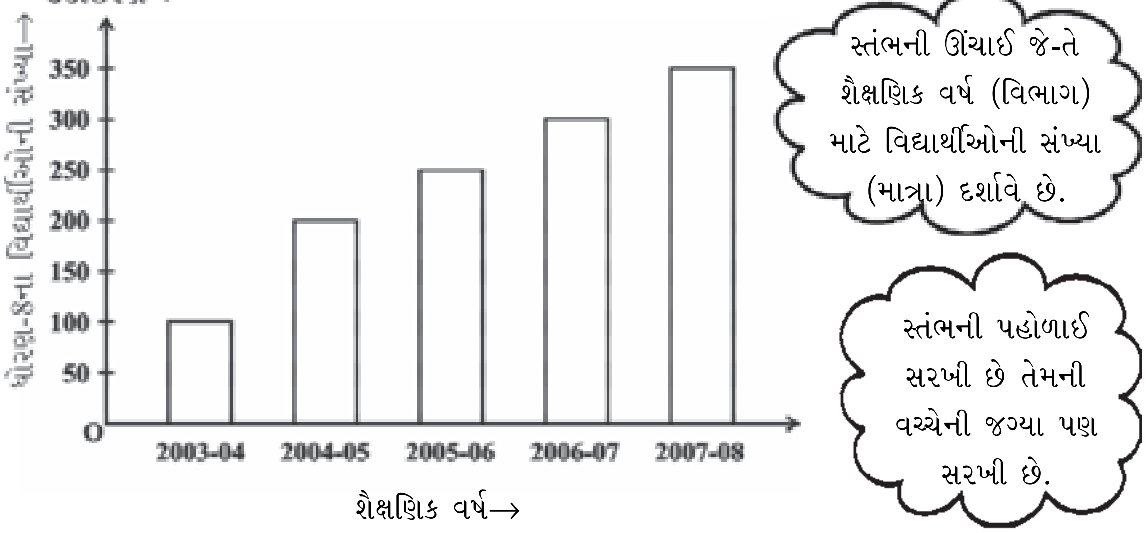
🚗 = 100 કાર ← એક સંકેત 100 કાર દર્શાવે છે.	
જુલાઈ	🚗 🚗 ▬ = 250 અહીં ▬ = 50 કાર
ઑગસ્ટ	🚗 🚗 🚗 = 300
સપ્ટેમ્બર	🚗 🚗 🚗 🚗 = ?

(i) જુલાઈ માસમાં કુલ કેટલી મોટરકારનું ઉત્પાદન થયું ?

(ii)કયા માસમાં સૌથી વધુ મોટરકારનું ઉત્પાદન થયું ?

2. લંબ આલેખ (દંડ આલેખ) : રેખાખંડ કે સમાન પહોળાઈવાળા સ્તંભોની મદદથી કરવામાં આવેલી માહિતીની રજૂઆતને લંબાલેખ (Bar Graph) કહે છે. આ સ્તંભોની ઊંચાઈ જે-તે ચલની કિંમતના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

ઉદાહરણ :



(i) લંબાલેખ દ્વારા કઈ માહિતી દર્શાવવામાં આવી છે ?

(ii) કયા વર્ષમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાં વધારો સૌથી મહત્તમ છે ?

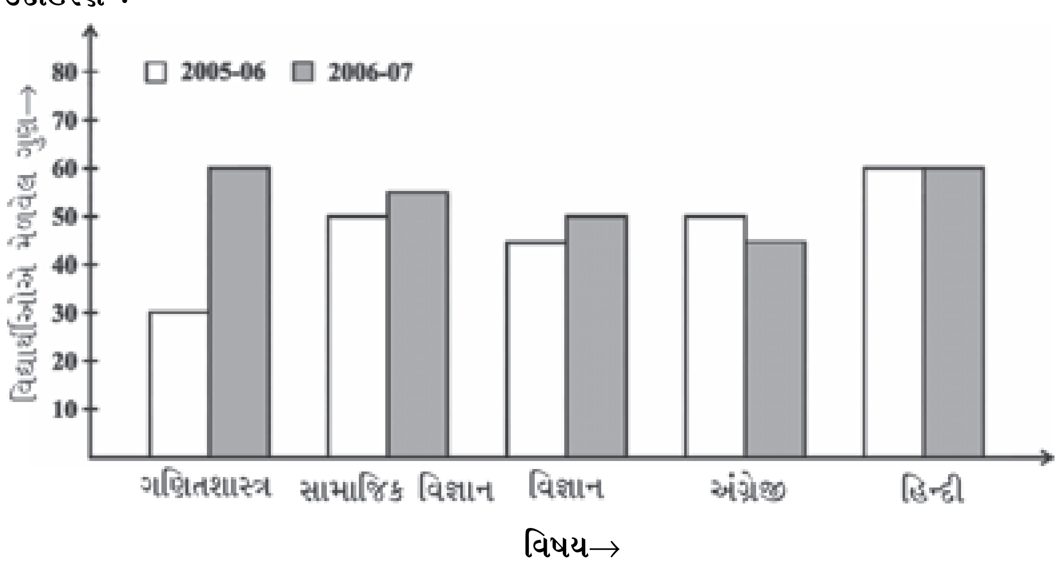
(iii) કયા વર્ષમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સૌથી વધુ છે ?

(iv) નીચેનું વિધાન ખરું છે કે ખોટું ?

'વર્ષ 2005-06 ના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા વર્ષ 2003-04 કરતાં બમણી છે.'

3. દ્વિ-લંબાલેખ : જે લંબાલેખમાં બે પ્રકારની માહિતીને એકસાથે દર્શાવવામાં આવે છે તેને દ્વિ-લંબાલેખ (Double Bar Graph) કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ :



(i) દ્વિ-લંબાલેખ દ્વારા કઈ માહિતી દર્શાવવામાં આવી છે ?

(ii) કયા વિષયના દેખાવમાં સૌથી વધુ વધારો થયો છે ?

(iii) કયા વિષયના દેખાવમાં સૌથી વધુ ઘટાડો થયો છે ?

(iv) કયા વિષયમાં દેખાવ સમાન છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો લંબાલેખના કોઈ સ્તંભની સ્થિતિમાં ફેરફાર કરવામાં આવે તો, શું આપેલી માહિતીનું અર્થઘટન બદલાય છે ? શા માટે ?

પ્રયત્ન કરો

નીચેની માહિતી દર્શાવતા યોગ્ય આલેખ દોરો.

1.

મહિના	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટેમ્બર	ઑક્ટોબર	નવેમ્બર	ડિસેમ્બર
વેચાયેલ ઘડિયાળની સંખ્યા	1000	1500	1500	2000	2500	1500

2.

વિદ્યાર્થીની પસંદગી	શાળા A	શાળા B	શાળા C
ચાલવું (Walking)	40	55	15
સાયકલ સવારી (Cycling)	45	25	35

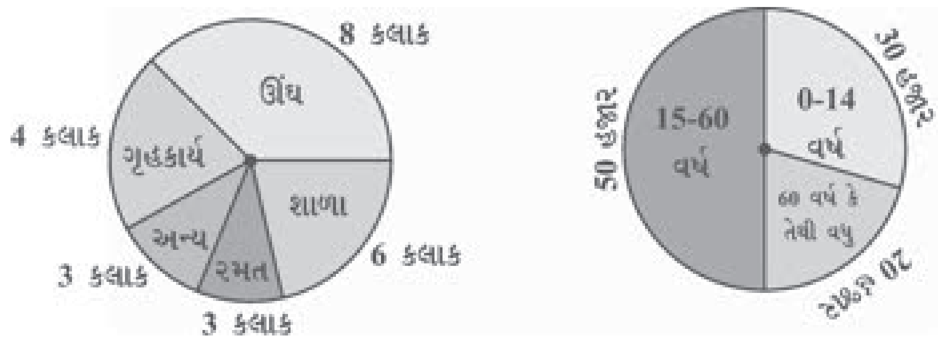
3. વન-ડે ક્રિકેટમાં વિશ્વની શ્રેષ્ઠ 8 ક્રિકેટ ટીમના વિજયનું પ્રતિશત પ્રમાણ

ટીમ	ચેમ્પિયન ટ્રોફીથી વર્લ્ડ કપ-06 સુધી	2007માં છેલ્લી 10 વન-ડે ક્રિકેટ
સાઉથ આફ્રિકા	75%	78%
ઑસ્ટ્રેલિયા	61%	40%
શ્રીલંકા	54%	38%
ન્યૂઝીલૅન્ડ	47%	50%
ઇંગ્લૅન્ડ	46%	50%
પાકિસ્તાન	45%	44%
વેસ્ટ ઇન્ડિઝ	44%	30%
ભારત	43%	56%

4.2 વર્તુળ આલેખ અથવા પાઈ-ચાર્ટ (Circ e ra h or Pie Chart)

શું તમે ક્યારેય (આકૃતિ 4.1 મુજબ) વર્તુળાકાર સ્વરૂપે દર્શાવેલ માહિતી ઉપયોગમાં લીધી છે ?

દિવસ દરમિયાન બાળક દ્વારા પસાર કરાતો સમય   નગરમાં વસતા લોકોની ઉંમર મુજબ વસ્તી



(i)   (ii)

આકૃતિ 4.1

આવા આલેખને વર્તુળ આલેખ કહે છે. વર્તુળ આલેખ એ આપેલી વિગતનો ચોક્કસ ભાગ અને તેના કુલ ભાગ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. અહીં, આકૃતિ 4.1 માં આખું વર્તુળ એ ચોક્કસ વૃત્તાંશોમાં વહેંચાયેલ છે. દરેક વૃત્તાંશનું કદ એ જે-તે પ્રવૃત્તિઓ કે માહિતીના પ્રમાણમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

ઉપરોક્ત આલેખમાં બાળક દ્વારા ઊંઘ માટે વપરાતો સમયગાળો (કે ઊંઘ માટે વપરાતા કલાકોનું પ્રમાણ)

$$= \frac{\text{ઊંઘના કલાકો}}{\text{દિવસના કુલ કલાકો}} = \frac{8 \text{ કલાક}}{24 \text{ કલાક}} = \frac{1}{3}$$

તેથી, ઊંઘનો સમયગાળો દર્શાવતા વૃત્તાંશનો ભાગ એ કુલ વર્તુળનો $\frac{1}{3}$ ભાગ બને. આ જ રીતે,

શાળા માટે બાળક દ્વારા વપરાતા કલાકોનું પ્રમાણ $= \frac{\text{શાળાના કલાકો}}{\text{દિવસના કુલ કલાકો}} = \frac{6 \text{ કલાક}}{24 \text{ કલાક}} = \frac{1}{4}$

આમ, શાળાના સમયગાળા માટે દર્શાવેલ વૃત્તાંશ એ આખા વર્તુળનો $\frac{1}{4}$ ભાગ છે.

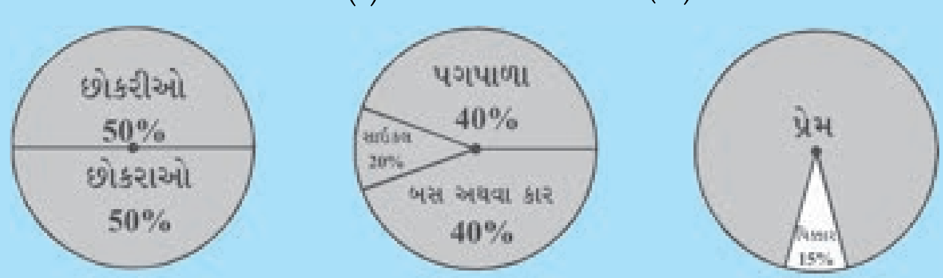
આ જ રીતે, બીજા વૃત્તાંશનો વિસ્તાર (કે કદ) પણ મેળવી શકાય. બધી જ પ્રવૃત્તિઓ માટે જરૂરી વૃત્તાંશ દર્શાવતાં અપૂર્ણાંક ભાગનો સરવાળો કરો. શું તમને સરવાળો એક મળે છે ?

વર્તુળ આલેખને પાઈ ચાર્ટ (ie C art) પણ કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે દર્શાવેલ દરેક પાઈ-આલેખ (આકૃતિ 4.2) એક વર્ગની વિવિધ માહિતી દર્શાવે છે. આ દરેક માહિતી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવે છે તે શોધો.

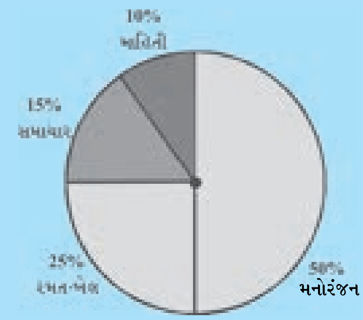
(i)   (ii)   (iii)



છોકરીઓ અથવા છોકરાઓ   શાળા પરિવહન   ગણિત

આકૃતિ 4.2

2. આકૃતિ 4.3 માં દર્શાવેલ પાઈ-ચાર્ટ પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :
   (i) કયા પ્રકારના કાર્યક્રમો સૌથી વધુ જોવાય છે ?
   (ii) કયા બે પ્રકારના કાર્યક્રમો નિહાળનાર દર્શકોની સંખ્યા રમત વિભાગના કાર્યક્રમો નિહાળનાર દર્શકોની સંખ્યા બરાબર છે ?



ટી.વી. પર વિવિધ કાર્યક્રમોની ચેનલ નિહાળનારા દર્શકો

આકૃતિ 4.3

4.2.1 પાઈ-ચાર્ટ દોરવો

શાળાના વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહને જુદા-જુદા પ્રકારના સ્વાદવાળા આઈસ્ક્રીમ આપવામાં આવ્યા તેની ટકાવારી નીચે મુજબ છે :

સ્વાદ	સ્વાદ પસંદગીમાં વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી
ચોકલેટ	50 %
વેનિલા	25 %
અન્ય	25 %

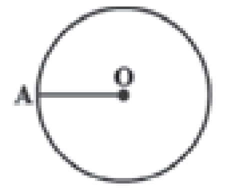
ઉપરોક્ત માહિતીનો આપણે પાઈ-ચાર્ટ બનાવીએ.

વર્તુળના કેન્દ્ર પાસે ખૂણાનું કુલ માપ 360° હોય. જે-તે વૃત્તાંશ માટે ખૂણાનું માપ એ 360°નો અપૂર્ણાંક ભાગ બને. આપણે જુદા-જુદા વૃત્તાંશો માટે તેના કેન્દ્ર પાસે બનતા ખૂણાનું માપ શોધવા માટેનું કોષ્ટક બનાવીએ (કોષ્ટક 4.1).

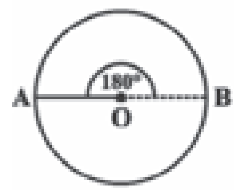
કોષ્ટક 4.1

સ્વાદ	સ્વાદ પસંદગીમાં વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી	અપૂર્ણાંક	360° નો ભાગ
ચોકલેટ	50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	360°નો $\frac{1}{2}$ ભાગ = 180°
વેનિલા	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360°નો $\frac{1}{4}$ ભાગ = 90°
અન્ય	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360°નો $\frac{1}{4}$ ભાગ = 90°

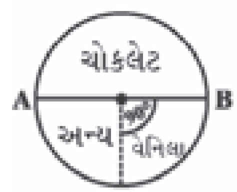
1. યોગ્ય ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેના કેન્દ્રને O અને ત્રિજ્યાને OA કહો.



2. ચોકલેટી સ્વાદવાળા વૃત્તાંશનો ખૂણો 180° છે. કોણ-માપકનો ઉપયોગ કરીને $\angle AOB = 180°$ દોરો.



3. બાકીના વૃત્તાંશ માટે પણ કોણમાપકનો ઉપયોગ કરો.

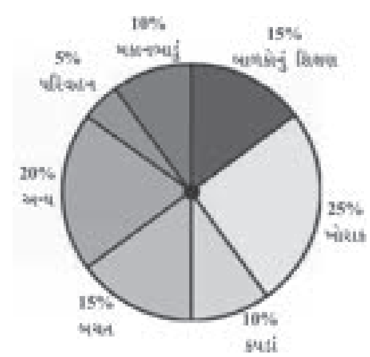


ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 4.4માં દર્શાવ્યા મુજબ વિવિધ વસ્તુઓનો ખર્ચ (ટકાવારીમાં) અને કુટુંબની માસિક બચત દર્શાવતો પાઈ-ચાર્ટ આપેલ છે.

(i) કઈ વસ્તુનો ખર્ચ મહત્તમ છે ?

(ii) કઈ વસ્તુનો ખર્ચ એ કુટુંબની કુલ બચત જેટલો છે ?

(iii) જો કુટુંબની માસિક બચત ₹ 3000 હોય તો કપડાનો માસિક ખર્ચ કેટલો હોય ?



આકૃતિ 4.4

ઉકેલ :

(i) ખોરાકમાં મહત્તમ ખર્ચ છે.

(ii) બાળકોના શિક્ષણ માટેનો ખર્ચ (અર્થાત્ 15%) એ કુટુંબની બચત બરાબર છે.

(iii) ₹ 3000 એ 15% દર્શાવે છે.

તેથી કુલ ખર્ચના 10% = ₹ $\frac{3000}{15} \times 10$ = ₹ 2000

ઉદાહરણ 2 : કોઈ ચોક્કસ દિવસે, બૅકરીની વિવિધ વસ્તુઓનું વેચાણ (₹ માં) નીચે મુજબ આપેલ છે :

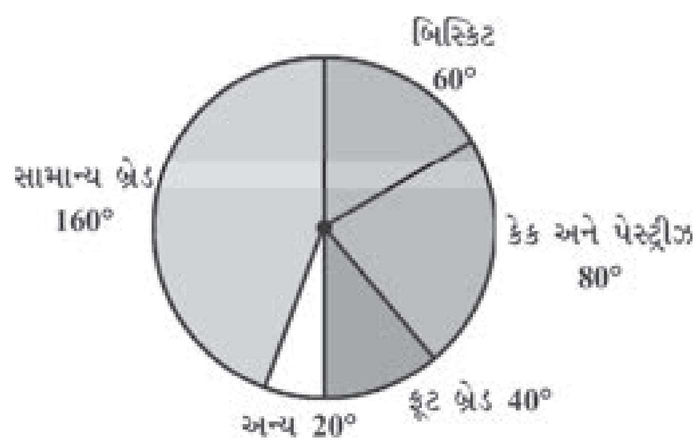
સામાન્ય બ્રેડ	:	320
ફ્રૂટ બ્રેડ	:	80
કેક અને પેસ્ટ્રી	:	160
બિસ્કિટ	:	120
અન્ય	:	40
કુલ	**:**	**720**

આ માહિતી માટે પાઈ-ચાર્ટ દોરો

ઉકેલ : આપણે અહીં દરેક વૃત્તાંશ માટે તેનો કેન્દ્ર પાસેનો ખૂણો શોધીએ. અહીં, કુલ વેચાણ = ₹ 720 છે.

વસ્તુ	વેચાણ (₹)	અપૂર્ણાંક	કેન્દ્ર પાસેનો ખૂણો
સામાન્ય બ્રેડ	320	$\frac{320}{720} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \times 360^\circ = 160^\circ$
બિસ્કિટ	120	$\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$
કેક અને પેસ્ટ્રીઝ	160	$\frac{160}{720} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{9} \times 360^\circ = 80^\circ$
ફ્રૂટ બ્રેડ	80	$\frac{80}{720} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \times 360^\circ = 40^\circ$
અન્ય	40	$\frac{40}{720} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{18} \times 360^\circ = 20^\circ$

હવે, ઉપરોક્ત કોષ્ટક (આકૃતિ 4.5) મુજબ પાઈ-ચાર્ટ બનાવીએ.



આકૃતિ 4.5

પ્રયત્ન કરો

નીચેની માહિતી માટે પાઈ-ચાર્ટ બનાવો :

દિવસ દરમિયાન બાળક દ્વારા પસાર કરાતો સમય.

ઊંઘ	-	8 કલાક
શાળા	-	6 કલાક
ગૃહકાર્ય	-	4 કલાક
રમત	-	4 કલાક
અન્ય	-	2 કલાક

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નીચેની માહિતી દર્શાવવા કયા પ્રકારનો આલેખ દોરવો વધુ યોગ્ય છે ?

1. રાજ્યનું ખાદ્ય અનાજનું ઉત્પાદન

વર્ષ	2001	2002	2003	2004	2005	2006
ઉત્પાદન લાખ (ટનમાં)	60	50	70	55	80	85

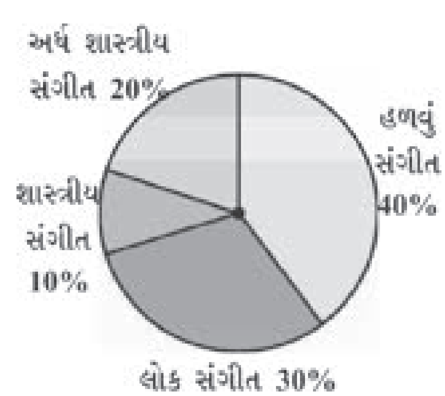
2. લોકોની ખોરાક માટેની પસંદગી

પસંદગીનો ખોરાક	લોકોની સંખ્યા
ઉત્તર ભારતીય	30
દક્ષિણ ભારતીય	40
ગુજરાતી	25
અન્ય	25
કુલ	**120**

3. કારખાનાનાં કામદારોની દૈનિક આવક

દૈનિક આવક (₹)	કામદારોની સંખ્યા
75-100	45
100-125	35
125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
કુલ	**480**

સ્વાધ્યાય 4.1



1. એક શહેરના યુવા વર્ગને ગમતાં વિવિધ પ્રકારનાં સંગીત વિશે એક મોજણી (Survey) કરવામાં આવી. બાજુમાં દર્શાવેલ વર્તુળ આલેખ (પાઈ-ચાર્ટ) મુજબ તેનાં પરિણામો મળ્યાં હતાં. આ વર્તુળ આલેખ (પાઈ-ચાર્ટ)ની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

(i) જો 20 યુવાનો શાસ્ત્રીય સંગીત પસંદ કરે છે તો, કેટલા યુવાનોની મોજણી કરી હતી ?

(ii) કયા પ્રકારનું સંગીત મહત્તમ યુવાનો પસંદ કરે છે ?

(iii) જો કોઈ કેસેટ કંપની આ સંગીતની 1000 CD તૈયાર કરે તો દરેક પ્રકારનાં સંગીત માટે કેટલી CD તૈયાર થાય ?

2. 360 લોકોને શિયાળો, ઉનાળો અને ચોમાસું એમ ત્રણ ઋતુમાંથી પોતાની પસંદગીની ઋતુ માટે મત આપવા જણાવવામાં આવ્યું.

ઋતુ	મતની સંખ્યા
ઉનાળો 	90
ચોમાસું 	120
શિયાળો 	150

(i) કઈ ઋતુને સૌથી વધુ મત મળ્યા ?

(ii) દરેક ઋતુના વૃત્તાંશ માટે તેના કેન્દ્ર પાસેના ખૂણાનું માપ શોધો.

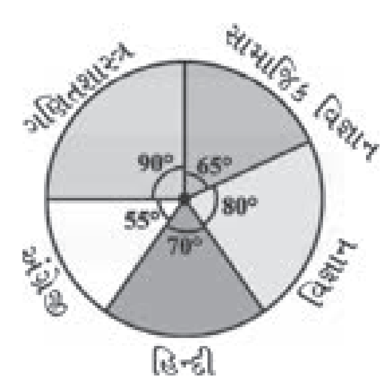
(iii) ઉપરોક્ત માહિતી દર્શાવતો પાઈ-ચાર્ટ તૈયાર કરો.

3. નીચેની માહિતી માટે પાઈ-ચાર્ટ તૈયાર કરો. કોષ્ટકમાં આપેલી વિગતો લોકોના પસંદગીના રંગ અંગેની માહિતી દર્શાવે છે.

રંગ	લોકોની સંખ્યા
વાદળી	18
લીલો	9
લાલ	6
પીળો	3
કુલ	**36**

દરેક વૃત્તાંશ માટે પ્રમાણ શોધો. ઉદાહરણ : વાદળી માટે $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; લીલા માટે $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ વિગેરે. સંગત ખૂણો દર્શાવવા માટે તેનો ઉપયોગ કરો.

4. અહીં આપેલ પાઈ-ચાર્ટમાં વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા હિન્દી, અંગ્રેજી, ગણિતશાસ્ત્ર, સામાજિક વિજ્ઞાન અને વિજ્ઞાનની પરીક્ષામાં 540 ગુણમાંથી મેળવેલા ગુણ દર્શાવેલ છે.



(i) કયા વિષયમાં વિદ્યાર્થીઓએ 105 ગુણ મેળવ્યા છે ? (**સૂચન :** 540 ગુણ માટે વૃતાંશકોણ 360° તેથી, 105 ગુણ માટે વૃતાંશકોણ કેટલો ?)

(ii) હિન્દી વિષય કરતાં ગણિતશાસ્ત્રમાં વિદ્યાર્થીઓએ કેટલા વધારે ગુણ મેળવ્યા છે ?

(iii) ચકાસો કે શું વિજ્ઞાન અને હિન્દી વિષયમાં મેળવેલ ગુણના સરવાળા કરતાં સામાજિક વિજ્ઞાન અને ગણિતશાસ્ત્રમાં મેળવેલ ગુણ વધારે છે ?

(**સૂચન :** વૃત્તાંશનાં કેન્દ્ર પાસેના ખૂણાના માપનો ઉપયોગ કરો.)

5. એક છાત્રાલયમાં જુદી-જુદી ભાષાઓ બોલતાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે મુજબ છે, તો પાઈ-ચાર્ટ તૈયાર કરો :

ભાષા	ગુજરાતી	અંગ્રેજી	ઉર્દુ	હિન્દી	સિંધી	કુલ
વિદ્યાર્થીની સંખ્યા	40	12	9	7	4	72

4.3 તક અને સંભાવના (Chance and Probabi it)

ઘણી વખત ચોમાસાની ઋતુમાં એવું બને છે કે નિયમિત રીતે તમે રેઈન-કોટ સાથે રાખો છો પણ તે દિવસોમાં વરસાદ આવતો નથી અને જે દિવસે તમે તમારો રેઈન-કોટ ભૂલી જાઓ છો તે જ દિવસે ધોધમાર વરસાદ આવે છે.

5CHRMV

ઘણી વખત એવું બને છે કે તમે પરીક્ષા માટે નક્કી કરાયેલાં 5 પ્રકરણોમાંથી 4 પ્રકરણ ખૂબ જ સારી રીતે તૈયાર કર્યાં હોય છે અને પ્રશ્નપત્રમાં જુઓ તો જે પ્રકરણ ઓછું તૈયાર કર્યું હોય તેમાંથી જ સૌથી વધુ પ્રશ્નો પૂછાય છે.
આ જ રીતે નિયમિત સમય પર દોડતી ટ્રેન પકડવા તમે સમયસર રેલવે-સ્ટેશન પર પહોંચી જાઓ છો, પરંતુ તે દિવસે જ એ ટ્રેન મોડી આવે છે.

આવું ઘણી વખત બને છે કે જે પરિસ્થિતિને તમે સાનુકૂળ બનાવવા પ્રયત્ન કરો એ વખતે જ તમારે પ્રતિકૂળતા ઊભી થાય છે. શું તમે આવાં વધુ ઉદાહરણો આપી શકો ?

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણો એવાં છે કે જેમાં કોઈ ચોક્કસ ઘટના બનશે કે નહીં બને તે એકસમાન હોતું નથી. કોઈ ટ્રેન નિર્ધારિત સમયે જ આવે કે મોડી પહોંચે તેની તકો (chances) એકસમાન હોતી નથી. તમે જ્યારે પ્રતિક્ષાયાદી (waiting list)માં હોય તેવી ટિકિટ ખરીદો છો, ત્યારે ખરેખર તો તમે એક તક ઝડપો છો, એવી આશા સાથે કે તમારી મુસાફરી શરૂ કરવાના સમય પહેલાં તમે તમારી બેઠક (seat) ચોક્કસ મેળવી શકશો.

અહીં, આપણે કેટલાક એવા પ્રયોગો કરીશું કે જેમાં જે-તે ઘટના ઘટવાની તકો એકસમાન હોય.

4.3.1 પરિણામ મેળવવું

તમે એવું નિહાળ્યું હશે કે કોઈ ક્રિકેટ મેચ શરૂ થતાં પહેલાં બંને ટીમના કપ્તાનો કઈ ટીમ પ્રથમ બેટ ગ કરશે તે ન ી કરવા માટે એક સિ ો ઉછાળે છે.

જ્યારે સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે છે ત્યારે સંભવિત પરિણામ શું હોઈ શકે ?

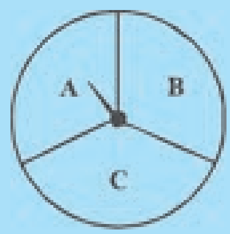
અલબત્ત, H (છાપ - Head) અથવા T (કાંટો - Tail). કલ્પના કરો કે તમે એક ટીમના કપ્તાન છો અને તમારો મિત્ર બીજી ટીમનો કપ્તાન છે. તમે સિક્કો ઉછાળો છો અને તમારા મિત્રને તે અંગે બોલવા કહો છો. શું તમે આ અંગેનાં પરિણામ પર કાબુ રાખી શકો છો ? શું તમારે (H) જોઈતો હોય તો તે મેળવી શકો છો ? અથવા (T) જોઈતો હોય તો મળે છે ? ના, આ શક્ય નથી. આ પ્રકારના પ્રયોગને **યાદચ્છિક પસંદગીના પ્રયોગો** કહે છે, અહીં છાપ અથવા કાંટો એ આપણને મળતી બે શક્યતાઓ છે.

પ્રયત્ન કરો

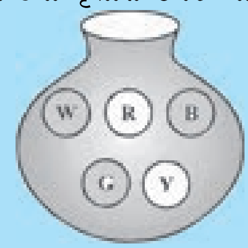
1. તમે કોઈ સ્કૂટર શરૂ કરવા જઈ રહ્યા છો તો તેની સંભવીત શક્યતાઓ શું હોઈ શકે ?
2. જ્યારે આપણે એક પાસો (die) ફેંકીએ છીએ ત્યારે કઈ છ સંભવીત શક્યતાઓ રહેલી હોય છે ?

3. આકૃતિ 4.6 માં દર્શાવ્યા મુજબનું એક ચક્ર જ્યારે તમે ઘુમાવો છો ત્યારે શું શક્યતાઓ રહેલી છે ? (યાદી કરો.)

   (અહીં શક્યતાઓ એટલે જ્યારે ચક્ર ઊભું રહે ત્યારે દર્શકકાંટો કયા વૃત્તાંશ ઉપર આવશે તે.)



આકૃતિ 4.6



આકૃતિ 4.7

4. તમારી પાસે આકૃતિ 4.7 માં દર્શાવ્યા મુજબના એક ઘડામાં વિવિધ રંગોવાળા પાંચ દડાઓ રાખેલા છે. તમારે તેમાં જોયા વગર કોઈ એક દડો પસંદ કરવાનો છે. તમને કયા રંગનો દડો મળશે તેની પ્રયત્નોની યાદી બનાવો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

પાસો (Die) ઉછાળવાની રમતમાં,

- શું પહેલા પાસો ફેંકનાર ખેલાડીને 6 મળવાની તકો વધુ રહે છે ?
- શું પ્રથમ ખેલાડી બાદ રમનાર બીજા ખેલાડીને 6 મળવાની તકો ઓછી રહે છે ?
- ધારો કે બીજા ખેલાડીને 6 મળે છે, તો તેનો એવો અર્થ કરી શકાય કે ત્રીજા ખેલાડીને 6 મળવાની કોઈ શક્યતા નથી ?

4.3.2 સમસંભાવી શક્યતાઓ (ua i e utcomes)

ધારો કે, એક સિક્કો અનેક વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને કેટલી વખત H (છાપ) કે T (કાંટો) મળે છે તે નોંધવામાં આવે છે. હવે નીચેનું પરિણામપત્રક જુઓ, જેમાં સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા સતત વધતી જાય છે.

સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા	આવૃત્તિ ચિહ્ન (H માટે)	H ની સંખ્યા	આવૃત્તિ ચિહ્ન (T માટે)	T ની સંખ્યા
50	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	27	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
60	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	28	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	32
70	–	33	–	37
80	–	38	–	42
90	–	44	–	46
100	–	48	–	52

અહીં, આપણે અવલોકન કરી શકીએ છીએ કે જેમ સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ H અને T મળવાની સંખ્યા વધુ ને વધુ નજીક આવતી જાય છે.

આ જ ઘટના પાસો ઉછાળવામાં પણ બને છે. જેમ પાસો ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ 1 થી 6 ક્રમાંક મળવાની સંખ્યા લગભગ એકબીજાને સમાન જેવી હોય છે.

આવા કિસ્સાઓમાં આપણે કહી શકીએ કે પ્રયોગ દરમિયાન જુદાં-જુદાં પરિણામો મળવાની તકો સમસંભાવી હોય છે. આનો મતલબ એ થયો કે, પ્રયોગ દરમ્યાન દરેક ઘટના બનવાની શક્યતા એકસમાન હોય છે.

4.3.3 તક અને સંભાવના વચ્ચે સંબંધ

એક સિક્કો ઉછાળવાનો પ્રયોગ વિચારો. શું શક્યતાઓ હોઈ શકે ? અહીં માત્ર બે જ શક્યતાઓ હોઈ શકે : H (છાપ) અથવા T (કાંટો) બંને પરિણામ મળવાની શક્યતા સમસંભાવી છે. H મળવાની શક્યતા એ કુલ બે શક્યતાઓ પૈકીની એક શક્યતા છે. અર્થાત્ $\frac{1}{2}$. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, H મળવાની સંભાવના = $\frac{1}{2}$. તો પછી, T મળવાની સંભાવના કેટલી હોઈ શકે ?

હવે, પાસો ફેંકવાનો પ્રયોગ વિચારો. (અહીં આપણે ઉપયોગમાં લેવાના પાસાની કુલ છ બાજુઓ પર 1 થી 6 નંબર લખેલા હોવા જોઈએ અર્થાત્ દરેક બાજુ પર માત્ર એક જ નંબર અને બધા જ નંબર અલગ-અલગ હોવા જોઈએ.) જો તમે આ પાસો 1 વખત ઉછાળો તો શું શક્યતા (outcomes) હોઈ શકે ?

અહીં, 1, 2, 3, 4, 5, 6 મળવાની શક્યતા છે. આમ, અહીં છ શક્યતાઓ સમાન રીતે એકસરખી બને છે. "2 મળવાની સંભાવના કેટલી થાય ?"

અહીં $\frac{1}{6}$ $\begin{array}{l} \leftarrow \text{2 મળવાની શક્યતાની સંખ્યા} \\ \leftarrow \text{સમસંભાવી કુલ શક્યતાની સંખ્યા} \end{array}$

5 મળવાની સંભાવના શું હોઈ શકે ? 7 મળવાની સંભાવના શું હોઈ શકે ? 6 માંથી 1 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

4.3.4 શક્યતા ઘટના સ્વરૂપે

દરેક પ્રયોગમાં મળતી શક્યતા કે શક્યતાઓનો સમૂહ 'ઘટના' (event)ને સ્વરૂપ આપે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં 'H' મળવો એ એક ઘટના છે અને તે જ રીતે 'T' મળવો એ પણ એક ઘટના છે.

પાસો ફેંકવાના પ્રયોગમાં દરેક પ્રયત્નને અંતે મળતી સંખ્યા 1, 2, 3, 4, 5 કે 6 એ એક ઘટના જ છે.

શું યુગ્મ સંખ્યા મળવી એ એક ઘટના છે ? યુગ્મ સંખ્યાઓ 2, 4 અથવા 6 હોઈ શકે, તેથી યુગ્મ સંખ્યા મળવી એ પણ એક ઘટના જ છે. યુગ્મ સંખ્યા પ્રાપ્ત થવાની સંભાવના કેટલી ?

અહીં, $\frac{3}{6}$ ← શક્યતાની સંખ્યા જે ઘટના બનાવે છે.
← કુલ શક્યતાની સંખ્યા

ઉદાહરણ 3 : એક થેલામાં 4 લાલ રંગના અને 2 પીળા રંગના દડા છે. (અહીં, દરેક દડા રંગ સિવાય અન્ય કોઈ રીતે જુદા પડતા નથી.) જો થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે (બહાર કાઢવામાં આવે) છે તો આ દડો લાલ રંગનો જ હોય તેની સંભાવના કેટલી ? શું તે સંભાવના પીળા રંગનો દડો હોવાની સંભાવના કરતાં વધુ કે ઓછી છે ?

ઉકેલ : આ ઘટના માટે કુલ (4 + 2 =) 6 શક્યતાઓ છે. લાલ રંગનો દડો મળે તેવી શક્યતા 4 છે. (શા માટે ?) તેથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલો દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ થાય.

આ જ રીતે, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ દડો પીળા રંગનો હોય તેની સંભાવના = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ થાય. (શા માટે ?) આમ, પસંદ થયેલ દડો લાલ રંગનો હોય તેની સંભાવના પીળા રંગનો દડો હોવાની સંભાવના કરતાં વધુ છે.

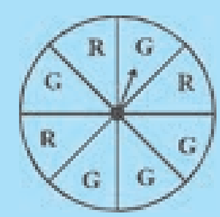
પ્રયત્ન કરો

ધારો કે તમે એક ચક્ર ઘુમાવો છો.

1. (i) આકૃતિ 4.8 માં દર્શાવ્યા મુજબ, લીલા રંગનું વૃત્તાંશ હોય તેવી શક્યતાની યાદી કરો અને લીલા રંગનું વૃત્તાંશ ન હોય તેવી શક્યતાની યાદી કરો.

   (ii) લીલા રંગનું વૃત્તાંશ મળે તેની સંભાવના શોધો.

   (iii) લીલા રંગનું વૃત્તાંશ ન મળે તેની સંભાવના શોધો.



આકૃતિ 4.8

4.3.5 વ્યવહારિક જીવનમાં તકો અને સંભાવનાઓ

જે દિવસે તમારી પાસે રેઈનકોટ ન હોય તે જ દિવસે વરસાદ આવે તેવી તકો વિશે આપણે અગાઉ ચર્ચા કરી.

તમે આ તકને સંભાવનાના સ્વરૂપમાં શું કહી શકો ? શું ચોમાસાના 10 દિવસમાંથી માત્ર એક દિવસ જ આવું બને ? તો તેનો અર્થ એવો થયો કે વરસાદ આવવાની સંભાવના $\frac{1}{10}$ છે અને તેથી વરસાદ ન આવવાની સંભાવના $\frac{9}{10}$ છે. (અહીં, આપણે ધારી લઈએ કે જે-તે દિવસે વરસાદ આવે કે ન આવે તેની શક્યતા એકસરખી છે.)

આપણા વ્યવહારુ જીવનમાં ઘણા કિસ્સામાં સંભાવનાનો ઉપયોગ થાય છે.

1. કોઈ એક મોટા સમૂહની લાક્ષણિકતા શોધવા માટે તે જ સમૂહના નાનકડા ભાગની લાક્ષણિકતા શોધવી.
   ઉદાહરણ તરીકે, ચૂંટણી દરમિયાન એક્ઝિટ પોલ (Exit poll) લેવામાં આવે છે. આમાં જે લોકો પોતાનો મત આપીને આવ્યા હોય છે તેવા લોકોમાંથી એક સમૂહ બનાવી તેઓનો અભિપ્રાય લેવામાં આવે છે. આવું દરેક વિસ્તારના લોકો (સમૂહ) સાથે કરવામાં આવે છે અને તેના પરથી દરેક ઉમેદવારની જીતવાની તકો વિશે અનુમાન કરાય છે.

2. ભૂતકાળનાં વર્ષોની માહિતી પરથી તે વખતના પ્રવાહો (Trends)નું અવલોકન કરી હવામાન ખાતું (Meteorological department) હવામાન વિશે આગાહી કરે છે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. અહીં આપેલા પ્રયોગમાં તમને જોવા મળતી શક્યતાઓની યાદી બનાવો.

(a) ફરતું ચક્ર (b) એક સાથે બે સિક્કા ઉછાળવા

2. પાસાને ફેંકવાથી મળતાં પરિણામની મદદથી નીચે પૈકીની ઘટના બનવાની શક્યતા

(i) (a) અવિભાજ્ય સંખ્યા (b) અવિભાજ્ય ન હોય તેવી સંખ્યા

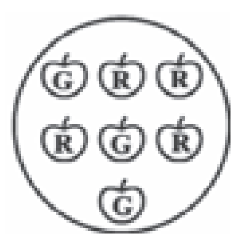
(ii) (a) 5 કરતાં મોટી સંખ્યા (b) 5 કરતાં મોટી ન હોય તેવી સંખ્યા

3. સંભાવના શોધો.

(a) પ્રશ્ન 1 (a)ની આકૃતિમાં દર્શક કાંટો વૃત્તાંશ D પર સ્થિર થાય.

(b) સારી રીતે ચીપેલાં (Well shuffled) 52 પાનાની જોડમાંથી એક પાનું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરીએ અને તે એક્કો હોય.

(c) લાલ સફરજન મળવાની શક્યતા. (નીચેની આકૃતિ જુઓ.)



4. એક ચબરખી પર માત્ર એક જ નંબર લખેલ હોય તેવી કુલ 10 ચબરખી પર 1 થી 10 અંકો લખીને તેને એક ખોખામાં રાખી તેને સારી રીતે ભેળવવામાં (Mix) આવે છે. તેમાંથી કોઈ એક ચબરખી જોયા વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. તો, નીચેની ઘટનાઓ માટે સંભાવના શોધો.

(i) ચબરખી પરની સંખ્યા 6 હોય.

(ii) ચબરખી પર લખાયેલ સંખ્યા 6 કરતાં નાની હોય.

(iii) ચબરખી પર લખાયેલ સંખ્યા 6 કરતાં મોટી હોય.

(iv) ચબરખી પર લખાયેલ સંખ્યા એક અંકવાળી હોય.

5. જો તમારી પાસે 3 લીલાં રંગનાં વૃત્તાંશો, 1 વાદળી રંગનું વૃત્તાંશ અને 1 લાલ રંગનું વૃત્તાંશ ધરાવતું ફરતું ચક્ર હોય તો લીલા રંગનું વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના કેટલી ? વાદળી રંગનું ન હોય, તેવાં વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના કેટલી ?

6. ઉપરોક્ત પ્રશ્ન-2 માં આપેલી ઘટનાઓ માટે સંભાવના શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સામાન્ય રીતે આપણને મળતી માહિતી અવ્યવસ્થિત સ્વરૂપે મળતી હોય છે જેને કાચી માહિતી કહે છે.
2. માહિતીને વર્તુળ આલેખ કે પાઈ-ચાર્ટની મદદથી પણ દર્શાવી શકાય છે. વર્તુળ આલેખ એ સમગ્ર માહિતી અને તેના થોડા ભાગ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.
3. એવા ઘણા પ્રયોગો છે જેમાં મળતાં પરિણામ અંગે એકસમાન તક હોય છે.
4. યાદચ્છિક પ્રયોગ એ એવો પ્રયોગ છે જેમાં કોઈ ઘટના બને તે પહેલાં તેનાં પરિણામ/શક્યતા વિશે અગાઉથી ચોક્કસ તારણ આપી શકાતું નથી.
5. જો કોઈ પ્રયોગમાં દરેક ઘટના બનવાની એકસમાન તક હોય તો તેવા પ્રયોગમાં મળતાં ઈચ્છિત પરિણામો મળવાની તકો એકસમાન હોય છે.
6. ઘટનાની સંભાવના $= \dfrac{\text{જે-તે ઘટના બનવાની શક્યતા}}{\text{પ્રયોગમાં રહેલ કુલ શક્યતાની સંખ્યા}}$
7. કોઈ પ્રયોગમાં એક કે એકથી વધુ શક્યતા ''ઘટના'' દર્શાવે છે.
8. આપણાં વ્યવહારુ જીવન સાથે પણ તકો અને સંભાવનાઓ સંકળાયેલી છે.

પ્રકરણ 5

વર્ગ અને વર્ગમૂળ

GTGV9S

5.1 પ્રાસ્તાવિક

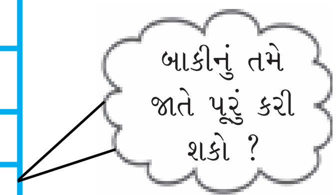
આપણે જાણીએ છીએ કે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ × બાજુ (જ્યાં 'બાજુ' એ ચોરસની લંબાઈનું માપ છે.) નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો :

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	ચોરસનું ક્ષેત્રફળ (સેમી^{2}માં)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

4, 9, 25, 64 અને તેના જેવી અન્ય સંખ્યાઓમાં ખાસ બાબત શું છે ?
અહીં 4ને $2 \times 2 = 2^2$ વડે, 9 ને $3 \times 3 = 3^2$ વડે રજૂ કરી શકાય છે. આમ, આવી સંખ્યાઓને કોઈ એક સંખ્યા લઈ ફરી એ જ સંખ્યા સાથે ગુણાકારના સ્વરૂપે લખી શકાય છે.
આમ, આવી 1, 4, 9, 16, 25, ... વગેરે સંખ્યાઓને **વર્ગ સંખ્યા** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.
સામાન્ય રીતે, ` કોઈ પ્રાકતિક સં યા ને $^2$ વ` દશાવી શકાય તો ને વગસં યા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે, એક પ્રાકતિક સં યા છે. શું 32 વગ સં યા છે ?
આપણે જાણીએ છીએ કે $5^2 = 25$ અને $6^2 = 36$. જો 32 એ વર્ગ સંખ્યા હોય, તો તે 5 અને 6ની વચ્ચે આવતી કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ હોય, પરંતુ 5 અને 6ની વચ્ચે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી. આમ, 32 એ વર્ગ સંખ્યા નથી.
નીચેની સંખ્યાઓ અને તેના વર્ગો વિશે વિચારો :

સંખ્યા	વર્ગ
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	-------------
7	-------------
8	-------------
9	-------------
10	-------------



ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે 1 થી 100 વચ્ચે આવતી વર્ગ સંખ્યાઓની યાદી બનાવી શકીએ. આ 1 થી 100 વચ્ચે આવતી પ્રાકૃતિક વર્ગ સંખ્યામાં કોઈ સંખ્યા બાકી રહી જાય છે ?

આપણને એવું જાણવા મળશે કે 1 થી 100 વચ્ચે આ સિવાયની કોઈ પણ સંખ્યા વર્ગ સંખ્યા નથી. તેથી 1, 4, 9, 16, ... વર્ગ સંખ્યાઓ છે. આવી સંખ્યાઓને **પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ** પણ કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ સંખ્યાઓ વચ્ચે આવતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ શોધો :

(i) 30 અને 40 (ii) 50 અને 60

5.2 વર્ગ સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં 1 થી 20ની વર્ગસંખ્યાઓ દર્શાવેલ છે.

સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

ઉપરના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરો. દરેક વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક શું જોવા મળે છે ? એટલે કે દરેક વર્ગ સંખ્યાનો અંતિમ અંક શું મળે છે ? આ બધી જ વર્ગ સંખ્યાઓનો એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 છે. એકપણ વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 2, 3, 7 અથવા 8 પૈકી કોઈ નથી.

શું આપણે એમ કહી શકીએ કે જો આપેલી સંખ્યાનો એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 હોય તો તે સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ જ હોય ? આ બાબતે થોડુંક વિચારશો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાઓ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ છે ? તમને કેવી રીતે ખબર પડી તે પણ જણાવો :

1. (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
(v) 1069 (vi) 2061

એવી પાંચ સંખ્યાઓ જણાવો કે જેના એકમના અંક પરથી જ જાણી શકાય કે તે વર્ગ સંખ્યા નથી.

2. એવી પાંચ સંખ્યાઓ જણાવો કે જેના એકમના અંક પરથી અનુમાન ન કરી શકાય કે તે વર્ગ સંખ્યા હશે કે નહિ હોય.

- નીચે આપેલા કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો. તેમાં કેટલીક સંખ્યાઓ અને તેના વર્ગ આપેલાં છે. આવી સંખ્યાઓના એકમના અંકનું નિરીક્ષણ કરો :

કોષ્ટક : 1

સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 છે :

વર્ગ	સંખ્યા
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

પ્રયત્ન કરો

123^2, 77^2, 82^2, 161^2 અને 109^2 માં કઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 છે ?

હવે પછીની એવી બે વર્ગ સંખ્યાઓ લખો જેનો એકમનો અંક 1 હોય અને તેને સંલગ્ન સંખ્યાઓ લખો

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જો કોઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 અથવા 9 હોય, તો તેનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 હોય.

- નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 6 છે :

વર્ગ	સંખ્યા
16	4
36	6
196	14
256	16

પ્રયત્ન કરો

નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 6 હશે ?

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2

(iv) 36^2 (v) 34^2

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જે સંખ્યાનો એકમનો અંક 4 અથવા 6 હોય, તેની વર્ગસંખ્યાનો એકમનો અંક 6 હશે.

શું તમને કોષ્ટક 1ની મદદથી બીજા કોઈ નિયમની જાણકારી મળે છે ?

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શું મળશે ?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880

(v) 21222 (vi) 9106

- નીચે આપેલી સંખ્યા અને તેના વર્ગો વિશે વિચારો :

અહીં એક જ શૂન્ય છે.

$$\left.\begin{aligned}10^2 &= 100\\ 20^2 &= 400\\ 80^2 &= 6400\end{aligned}\right\}$$

અહીં બે શૂન્યો મળે છે.

અહીં બે શૂન્યો છે.

$$\left.\begin{aligned}100^2 &= 10000\\ 200^2 &= 40000\\ 700^2 &= 490000\\ 900^2 &= 810000\end{aligned}\right\}$$

અહીં 4 શૂન્યો મળે છે.

જો કોઈ સંખ્યાના છેલ્લા ત્રણ અંકો શૂન્ય હોય તો તેવી સંખ્યાનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યામાં છેલ્લે કેટલાં શૂન્યો હશે ?

કોઈ સંખ્યાના અંતે રહેલા શૂન્યની સંખ્યા અને તે સંખ્યાનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યામાં રહેલ શૂન્યોની સંખ્યા વિશે તમે શું નિરીક્ષણ કર્યુ ?

શું આપણે કહી શકીએ કે કોઈ વર્ગ સંખ્યાનાં અંતિમ શૂન્યોની સંખ્યા હંમેશાં બેકી જ હોય ?

- સંખ્યા અને તેના વર્ગો દર્શાવતું કોષ્ટક 1 જુઓ.

તમે એકી સંખ્યા અને બેકી સંખ્યાના વર્ગો વિશે શું કહી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલી કઈ સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવાથી તે એકી સંખ્યા કે બેકી સંખ્યા આવશે ? કેમ ?

   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

2. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યાઓમાં કેટલાં શૂન્યો હશે ?

   (i) 60 (ii) 400

5CHMPI

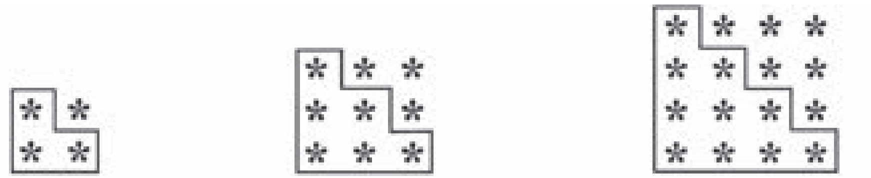
5.3 કેટલીક રસપ્રદ પેટર્ન

1. ત્રિકોણીય સંખ્યાઓનો સરવાળો.

તમને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ યાદ છે (એવી સંખ્યાઓ કે જેની બિંદુઓથી દર્શાવતી પેટર્નને ત્રિકોણ તરીકે ગોઠવી શકાય).

*	* **	* ** ***	* ** *** ****	* ** *** **** *****
1	3	6	10	15

જો આપણે એક સાથે બે ક્રમિક ત્રિકોણીય સંખ્યા વિચારીએ, તો આપણને વર્ગ સંખ્યા મળે છે, જેમ કે-



$1 + 3 = 4$
$= 2^2$

$3 + 6 = 9$
$= 3^2$

$6 + 10 = 16$
$= 4^2$

2. બે વર્ગ સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંખ્યાઓ

હવે આપણે બે ક્રમિક વર્ગ સંખ્યાઓને જોડતી રસપ્રદ પેટર્ન જોઈએ.

$1\ (= 1^2)$

2, 3, $4\ (= 2^2)$

5, 6, 7, 8, $9\ (= 3^2)$

10, 11, 12, 13, 14, 15, $16\ (= 4^2)$

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, $25\ (= 5^2)$

બે વર્ગ સંખ્યાઓ 1 અને 4ની વચ્ચે બે સંખ્યાઓ એવી મળે છે કે જે વર્ગ નથી.

બે વર્ગ સંખ્યાઓ 4 અને 9ની વચ્ચે ચાર સંખ્યાઓ એવી મળે છે કે જે વર્ગ નથી.

બે વર્ગ સંખ્યાઓ 9 અને 16ની વચ્ચે છ સંખ્યા એવી મળે છે કે જે વર્ગ નથી.

બે વર્ગ સંખ્યાઓ 16 અને 25ની વચ્ચે આઠ સંખ્યાઓ એવી મળે છે કે જે વર્ગ નથી.

આમ, 1^2 (= 1) અને 2^2 (= 4) વચ્ચે બે (2×1) વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ 2, 3 મળે.
2^2 (= 4) અને 3^2 (= 9) વચ્ચે ચાર (2×2) વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ 5, 6, 7, 8 મળે.

હવે $3^2 = 9$ અને $4^2 = 16$

તેથી $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

પરંતુ 9(= 3^2) અને 16(= 4^2) વચ્ચે વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ છે 10, 11, 12, 13, 14, 15. આમ, મળેલી છ સંખ્યાઓ એ બે વર્ગોના તફાવતથી એક ઓછી છે.

હવે, $4^2 = 16$ અને $5^2 = 25$

તેથી $5^2 - 4^2 = 9$

પરંતુ 16(= 4^2) અને 25 (= 5^2) વચ્ચે વર્ગ સંખ્યા (એટલે કે પૂર્ણવર્ગ) ન હોય તેવી સંખ્યાઓ આઠ હોય છે. જેમ કે, 17, 18, 19, ..., 24. આમ આવી મળતી સંખ્યાઓ એ બે વર્ગોના તફાવતથી એક ઓછી હોય છે.

7^2 અને 6^2 માટે વિચારો. તમે કહી શકો કે 6^2 અને 7^2 વચ્ચે આવી પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ હશે ?

જો આપણે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n અને $(n + 1)$ માટે વિચારીએ તો,

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

આપણે શોધી શકીએ કે n^2 અને $(n + 1)^2$ વચ્ચે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ $2n$ હોય. જે બે પૂર્ણવર્ગના તફાવતથી એક ઓછી છે.

આમ, આપણે વ્યાપક રૂપે કહી શકીએ કે કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ n અને $(n + 1)$ના વર્ગો વચ્ચે આવતી પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ $2n$ હશે. તમે $n = 5$, $n = 6$ માટે ચકાસણી કરો.

પ્રયત્ન કરો

1. 9^2 અને 10^2 વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ આવે ? તેમજ 11^2 અને 12^2 વચ્ચે કેટલી ?

2. નીચે આપેલ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓની જોડીઓ વચ્ચે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ આવે ?
(i) 100^2 અને 101^2 (ii) 90^2 અને 91^2 (iii) 1000^2 અને 1001^2

3. એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો

નીચેના સરવાળાઓ જુઓ :

1 [એક એકી સંખ્યા છે] $= 1 = 1^2$

1 + 3 [પ્રથમ બે એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો] $= 4 = 2^2$

1 + 3 + 5 [પ્રથમ ત્રણ એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો] $= 9 = 3^2$

1 + 3 + 5 + 7 […] $= 16 = 4^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 […] $= 25 = 5^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 […] $= 36 = 6^2$

તેથી આપણે કહી શકીએ કે પ્રથમ n એકી સંખ્યાનો સરવાળો n^2 મળે.

આ બાબતને જો આપણે બીજી રીતે જોઈએ તો, 'જો કોઈ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે, તો તેને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકાય.'

અહીં, 2, 3, 5, 6, … વગેરે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ છે. શું આપણે તેને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકીએ ? વિચારો.

તમે કહી શકશો કે આ રીતે રજૂ કરી શકાય નહિ.

હવે સંખ્યા 25 વિચારો. 25માંથી ક્રમિક 1, 3, 5, 7, 9 … ની બાદબાકી કરીએ તો…

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$
(iv) $16 - 7 = 9$ (v) $9 - 9 = 0$

અર્થાત્, $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ અને 25 પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા પણ છે.

હવે બીજી સંખ્યા 38 વિચારો. ઉપર મુજબ જ બાદબાકી કરતાં,

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$
(iv) $29 - 7 = 22$ (v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$
(vii) $2 - 13 = -11$

આ બતાવે છે કે આપણે 38 ને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકતા નથી તેમજ 38 એ પૂર્ણવર્ગ પણ નથી.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે, ''જો આપેલ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ ન કરી શકાય, તો તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.''

આ પરિણામના ઉપયોગથી આપણે આપેલ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે કે નહિ તે શોધી શકીએ છીએ.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે કે નહિ તે કહો :
(i) 121 (ii) 55 (iii) 81 (iv) 49 (v) 69

4. ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો

નીચેની બાબત ધ્યાનથી જુઓ :

પ્રથમ સંખ્યા $\frac{3^2 - 1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

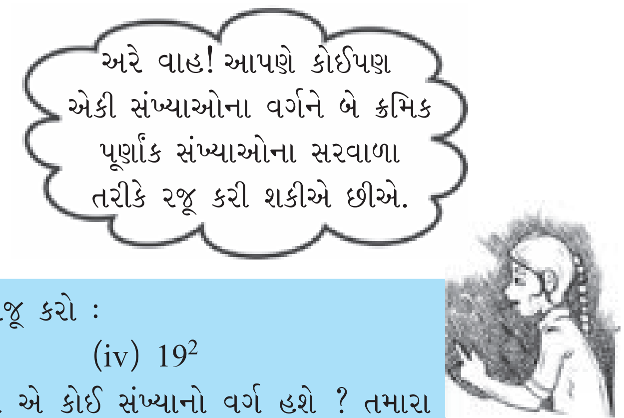
$7^2 = 49 = 24 + 25$

બીજી સંખ્યા $\frac{3^2 + 1}{2}$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$



પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની સંખ્યાઓને બે ક્રમિક સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરો :

(i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2

2. શું એ પણ સાચું છે કે, બે ક્રમિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ હશે ? તમારા જવાબના આધાર માટે ઉદાહરણ પણ આપો.

5. બે ક્રમિક એકી અથવા બેકી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

પણ $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

તેથી $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

તેવી જ રીતે $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30 - 1)\ (30 + 1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45 - 1)\ (45 + 1) = 45^2 - 1$

તેથી આપણે એવું કહી શકીએ કે, $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓની અન્ય બીજી તરાહો

$1^2 = 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

$111^2 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$

$1111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

$11111111^2 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

બીજી રસપ્રદ તરાહ...

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

આવું કેમ બને છે તે શોધી કાઢવા તમે જ્યારે સક્ષમ બનશો ત્યારે મજા પડશે. જ્યારે અમુક વર્ષો પછી તમને તેનો જવાબ મળશે ત્યારે તે તમારા માટે રસપ્રદ રહેશે અને આવા પ્રશ્નોથી વિચાર શક્તિ વિસ્તરશે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યા માટે ઉપર દર્શાવેલ તરાહ મુજબ વર્ગ કરો :

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

પ્રયત્ન કરો

શું તમે બાજુની તરાહની મદદથી આપેલી સંખ્યાઓનો વર્ગ શોધી શકો ?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓના વર્ગ કરવાથી એકમનો અંક શું મળશે ?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853

(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880

(ix) 12796 (x) 55555

2. નીચેની સંખ્યાઓ માટે સ્પષ્ટ છે કે તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ નથી. કારણ સહ જણાવો.

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222

(v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. નીચે આપેલી સંખ્યાઓમાંથી કઈ સંખ્યાઓનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યા એકી સંખ્યા હશે ?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. નીચેની પૅટર્નમાંથી ખૂટતી સંખ્યાઓ જણાવો :

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$1001^2 = 1002001$$
$$100001^2 = 1.....2.....1$$
$$10000001^2 = ...$$

5. નીચે આપેલી પૅટર્નમાં ખૂટતી સંખ્યાઓ જણાવો :

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = ...$$
$$..................^2 = 10203040504030201$$

6. નીચેની રીત મુજબ ખૂટતી સંખ્યાઓ શોધો :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + ...^2 = 21^2$

$5^2 + ...^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + ...^2 = ...^2$

> **રીત શોધવા માટે :**
> ત્રીજી સંખ્યા એ પ્રથમ અને બીજી સંખ્યા સાથે સંલગ્ન છે. કેવી રીતે ?
> ચોથી સંખ્યા એ ત્રીજી સંખ્યા સાથે સંલગ્ન છે. કેવી રીતે ?

7. સરવાળાની ક્રિયા વિના સરવાળો મેળવો.

(i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

8. (i) 49ને 7 એકી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

(ii) 121ને 11 એકી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

9. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના વર્ગો વચ્ચે કેટલી સંખ્યાઓ આવશે તે જણાવો.

(i) 12 અને 13 (ii) 25 અને 26 (iii) 99 અને 100

5.4 સંખ્યાઓનો વર્ગ શોધવો

આપણા માટે 3, 4, 5, 6, 7, ... વગેરે નાની સંખ્યાઓના વર્ગો શોધવા સરળ છે, પરંતુ 23નો વર્ગ ઝડપથી શોધવો હોય તો ?

તેનો જવાબ આપવો સરળ નથી. વર્ગ શોધવા માટે આપણે 23×23 કરવું પડે.

પરંતુ 23×23 કર્યા વિના 23નો વર્ગ શોધવાનો એક બીજો રસ્તો પણ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$23 = 20 + 3$$

તેથી
$$\begin{aligned} 23^2 &= (20 + 3)^2 \\ &= 20(20 + 3) + 3(20 + 3) \\ &= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2 \\ &= 400 + 60 + 60 + 9 \\ &= 529 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 1 : ખરેખર ગુણાકારની ક્રિયા કર્યા વિના જ નીચેની સંખ્યાઓના વર્ગો શોધો :

(i) 39 (ii) 42

ઉકેલ : (i)
$$\begin{aligned} 39 &= (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9\ (30 + 9) \\ &= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2 \\ &= 900 + 270 + 270 + 81 \\ &= 1521 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 42^2 &= (40 + 2)^2 \\ &= 40(40 + 2) + 2(40 + 2) \\ &= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2 \\ &= 1600 + 80 + 80 + 4 \\ &= 1764 \end{aligned}$$

5.4.1 વર્ગ શોધવા માટેની અન્ય રીતો

નીચેની રીત પર વિચારો :

$$\begin{aligned} 25^2 &= 625 = (2 \times 3) \times \text{સો} + 25 \\ 35^2 &= 1225 = (3 \times 4) \times \text{સો} + 25 \\ 75^2 &= 5625 = (7 \times 8) \times \text{સો} + 25 \\ 125^2 &= 15625 = (12 \times 13) \times \text{સો} + 25 \end{aligned}$$

જે સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 છે એટલે કે તે સંખ્યા $a5$ હોય તો

$$\begin{aligned} (a5)^2 &= (10a + 5)^2 \\ &= 10a(10a + 5) + 5\ (10a + 5) \\ &= 100a^2 + 50a + 50a + 25 \\ &= 100a\ (a + 1) + 25 \\ &= a(a + 1) \times \text{સો} + 25 \end{aligned}$$

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યામાં એકમનો અંક 5 છે, તેમનો વર્ગ શોધો.

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

5.4.2 પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓ (P tha orean ri ets)

નીચેના માટે વિચારો :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

સંખ્યાઓ 3, 4 અને 5નો સમૂહ એ ''પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી'' તરીકે ઓળખાય છે.

તેમજ 6, 8, 10 એ પણ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે. કેમ કે,

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

ફરીથી નિરીક્ષણ કરો $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

એટલે કે સંખ્યાઓ 5, 12 અને 13 પણ આવી ત્રિપુટી રચે છે.

શું તમે આવી અન્ય ત્રિપુટીઓ શોધી શકો ?

કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $m > 1$, માટે જો $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ તો $2m$, $m^2 - 1$ અને $m^2 + 1$ એ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે.

ઉપરના પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી માટેના વ્યાપક સ્વરૂપની મદદથી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓ મેળવો.

ઉદાહરણ 2 : જેનો નાનામાં નાનો અંક 8 હોય તેવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી શોધો.

ઉકેલ : આપણે પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી તેના વ્યાપક સ્વરૂપ $2m$, $m^2 - 1$ અને $m^2 + 1$ ની મદદથી શોધીશું.

સૌ પ્રથમ આપણે $m^2 - 1 = 8$ લઈશું.

તેથી $m^2 = 8 + 1 = 9$

તેથી $m = 3$

એટલે કે $2m = 6$ અને $m^2 + 1 = 10$

અહીં પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી 6, 8 અને 10 મળે છે, પરંતુ 8 એ આ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીનો નાનામાં નાનો અંક નથી.

તેથી આપણે $2m = 8$ લઈએ

$\therefore m = 4$

તેથી આપણને $m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ અને

$m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$ મળશે.

આમ, 8, 15, 17 એ એવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે કે જેનો નાનામાં નાનો અંક 8 છે.

ઉદાહરણ 3 : જે પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીમાં એક સંખ્યા 12 હોય તેવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી શોધો.

ઉકેલ : જો આપણે $m^2 - 1 = 12$ લઈએ તો

$m^2 = 12 + 1 = 13$

તેથી mની કિંમત પૂર્ણાંક નથી.

તેથી આપણે $m^2 + 1 = 12$ લઈએ, ફરી $m^2 = 11$ અહીં, આપણને mની પૂર્ણાંક કિંમત મળતી નથી.

તેથી આપણે $2m = 12$ લઈએ.

$\therefore m = 6$

તેથી $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$, $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

આમ, પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી 12, 35 અને 37 મળે.

નોંધ : બધી જ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી આ વ્યાપક સ્વરૂપથી નથી મળતી. ઉદાહરણ તરીકે 5, 12, 13 બીજી એક પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે, જેનો એક અંક 12 છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના વર્ગ શોધો :
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86
   (iv) 93 (v) 71 (vi) 46
2. નીચે આપેલી સંખ્યા ધરાવતી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી લખો :
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

5.5 વર્ગમૂળ (uareroots)

નીચેની પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરો :

(a) જો એક ચોરસનું ક્ષેત્રફળ 144 cm^2 હોય તો તે ચોરસની બાજુનું માપ કેટલું હોય ?

આપણે જાણીએ છીએ કે,

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)^2

જો આપણે ચોરસની બાજુની લંબાઈ 'a' ધારીએ તો, $144 = a^2$

આમ, a ની કિંમત શોધવા માટે આપણે એવી સંખ્યા શોધવી પડે કે જેનો વર્ગ 144 મળે.

(b) આકૃતિ 5.1માં 8 સેમી બાજુવાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શું હશે ?

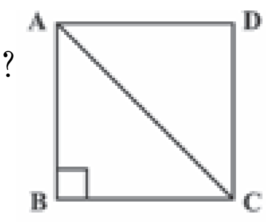
શું આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી આનો ઉકેલ મેળવી શકીએ ?

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore\ 8^2 + 8^2 = AC^2$

અથવા $64 + 64 = AC^2$

અથવા $128 = AC^2$



આકૃતિ 5.1

આપણને ACની કિંમત તો જ મળે જો આપણે શોધી કાઢીએ કે 128 એ કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે.

(c) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને કોઈ એક બાજુની લંબાઈ અનુક્રમે 5 સેમી અને 3 સેમી છે. (આકૃતિ 5.2) શું તમે ત્રીજી બાજુની લંબાઈ શોધી શકશો ?

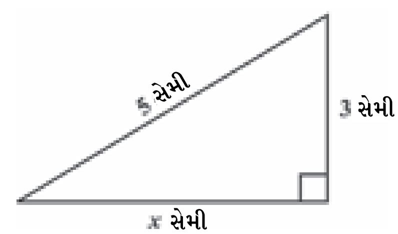
ધારો કે ત્રીજી બાજુની લંબાઈ x સેમી છે.

પાયથાગોરસના પ્રમેયની મદદથી, $5^2 = x^2 + 3^2$

$\therefore\ 25 = x^2 + 9$

$\therefore\ 25 - 9 = x^2$

$\therefore\ 16 = x^2$



આકૃતિ 5.2

આપણને xની કિંમત માટે 16 કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે તેની જાણકારી જરૂરી છે.

આમ, ઉપરના બધા જ કિસ્સાઓમાં આપણે એક એવી સંખ્યા શોધવી પડે કે જેનો વર્ગ જાણીતી સંખ્યા મળે. આમ, જાણીતી સંખ્યા કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે, તે શોધવાની પ્રક્રિયાને વર્ગમૂળ શોધવાની પ્રક્રિયા કહે છે.

5.5.1 વર્ગમૂળ શોધવું

જેવી રીતે સરવાળાની વિરુદ્ધ ક્રિયા બાદબાકી અને ગુણાકારની વિરુદ્ધ ક્રિયા ભાગાકાર છે, તેવી જ રીતે કોઈ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવું તે વર્ગ શોધવાની ક્રિયાની વિરુદ્ધ પ્રકારની ક્રિયા છે. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$1^2 = 1$ તેથી 1નું વર્ગમૂળ 1 છે.

$2^2 = 4$ તેથી 4નું વર્ગમૂળ 2 છે.

$3^2 = 9$ તેથી 9નું વર્ગમૂળ 3 છે.

જો કે $9^2 = 81$ અને $(-9)^2 = 81$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે 81નું વર્ગમૂળ -9 અને 9 છે.

પ્રયત્ન કરો

(i) જો $11^2 = 121$, તો 121નું વર્ગમૂળ ?

(ii) $14^2 = 196$, તો 196નું વર્ગમૂળ ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

$(-1)^2 = 1$, શું -1 એ 1નું વર્ગમૂળ છે ? $(-2)^2 = 4$, શું -2 એ 4 નું વર્ગમૂળ છે ?

$(-9)^2 = 81$, શું -9 એ 81નું વર્ગમૂળ છે ?

ઉપરની ચર્ચા પરથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું.

ધન વર્ગમૂળ ને આપણે $\sqrt{\ }$ સંકેતથી દર્શાવીશું

દાખલા તરીકે, $\sqrt{4} = 2$ (-2 નહીં લઈએ) $\sqrt{9} = 3$ (-3 નહીં લઈએ) વગેરે.

વિધાન	અનુમાન
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

વિધાન	અનુમાન
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

50FEST

5.5.2 પુનરાવર્તીત બાદબાકીની મદદથી વર્ગમૂળ શોધવું

તમને યાદ છે ને કે પ્રથમ n એકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n^2 મળે ? તેથી પ્રત્યેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

$\sqrt{81}$ માટે વિચારીએ તો,

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$

(iv) $72 - 7 = 65$ (v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$

(vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$ (ix) $17 - 17 = 0$

અહીં આપણે 81માંથી 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યા બાદ કરતા ગયા અને 9મા પગલે આપણને બાદબાકી શૂન્ય મળે છે. તેથી $\sqrt{81} = 9$

શું તમે 729નું વર્ગમૂળ આ પદ્ધતિથી શોધી શકો ? હા. પરંતુ તે પ્રક્રિયા ઘણી જ લાંબી અને વધારે સમય લાગે તેવી છે. ચાલો, આપણે સરળ રીતે વર્ગમૂળ શોધવાની રીત જાણીએ.

પ્રયત્ન કરો

1 થી શરૂ કરી ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાની પુનરાવર્તિત બાદબાકી કરીને જણાવો કે નીચેની સંખ્યાઓ પૂર્ણવર્ગ છે કે નહીં ? જો પૂર્ણવર્ગ હોય તો તેમનું વર્ગમૂળ શોધો.

(i) 121

(ii) 55

(iii) 36

(iv) 49

(v) 90

5.5.3 અવિભાજ્ય અવયવીકરણની મદદથી વર્ગમૂળ શોધવું

નીચે સંખ્યા અને તેના વર્ગોને અવિભાજ્ય અવયવના ગુણાકાર તરીકે રજૂ કરેલ છે.

સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવો	વર્ગના અવિભાજ્ય અવયવ
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

અહીં 6ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 કેટલી વાર આવે છે ? એકવાર. 36 ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 કેટલી વાર આવે છે ? બે વાર. તેવી જ રીતે નિરીક્ષણ કરો કે 6 અને 36 ના અવયવીકરણમાં 3 તેમજ 8 અને 64ના અવયવીકરણમાં 2 કેટલીવાર આવે ? આપણને જાણવા મળશે કે દરેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ બે વાર આવે છે. એટલે કે દરેક અવિભાજ્ય અવયવ બે-બેની જોડીમાં આવે છે.

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ 324 નું વર્ગમૂળ શોધવા માટે કરીએ.
આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

અવિભાજ્ય અવયવોની જોડી બનાવતાં,

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

તેથી $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

તેવી જ રીતે આપણે 256નું વર્ગમૂળ શોધીએ. 256ના અવિભાજ્ય અવયવો.

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

અવિભાજ્ય અવયવોની જોડી બનાવતાં

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$$
$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

$\therefore \quad \sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

શું 48 પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે ?

આપણે જાણીએ છીએ કે, $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

અહીં 48ના અવિભાજ્ય અવયવો જોડીમાં નથી. તેથી 48 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

ધારો કે આપણે 48 નો એવો નાનામાં નાનો ગુણક શોધવો છે કે જેથી 48 પૂર્ણવર્ગ બને. તો આપણે શું કરીશું ? 48ના અવયવોની જોડી બનાવતાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અવયવ 3 જોડીમાં નથી. તેથી 48ને માત્ર 3 વડે ગુણવાથી જોડી બની જાય.

આમ, $48 \times 3 = 144$ એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

શું આપણે કહી શકીએ કે કઈ નાનામાં નાની સંખ્યા વડે 48 ને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ મળે ?

48ના અવિભાજ્ય અવયવમાં 3 એ જોડીમાં નથી, તેથી જો આપણે 48 ને 3 વડે ભાગીએ તો આપણને $48 \div 3 = 16$ મળે. તેમજ $16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = 16$ પણ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે. આમ, 48ને 3 વડે ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે.

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

ઉદાહરણ 4 : 6400નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ : આપણે 6400 ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

$$6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$$

$\therefore \quad \sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

2	90
3	45
3	15
	5

ઉદાહરણ 5 : શું 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે ?

ઉકેલ : આપણે 90ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીએ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

પરંતુ, અહીં અવિભાજ્ય સંખ્યા 2 અને 5 જોડીમાં નથી. તેથી 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી. જો કે બીજી રીતે જોઈએ તો 90 માં માત્ર એક જ શૂન્ય છે. તેથી તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા ન હોય.

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
7	7
	1

ઉદાહરણ 6 : શું 2352 એ પૂર્ણવર્ગ છે ? જો ના તો કઈ નાનામાં નાની સંખ્યાને 2352 સાથે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ મળે ? આ મળતી નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

અહીં, અવિભાજ્ય અવયવ 3 એ જોડીમાં નથી. તેથી 2352 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી. હવે જો 3 જોડીમાં હોય તો તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા બને. તેથી આપણે 2352 ને 3 વડે ગુણીએ તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ બને.

$\therefore \; 2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

હવે દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા જોડીમાં છે. તેથી $2352 \times 3 = 7056$ એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે. આમ, 2352ને નાનામાં નાની સંખ્યા 3 વડે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે અને તે મળતી સંખ્યા 7056 છે.

અને, $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

ઉદાહરણ 7 : 9408ને એવી કઈ નાનામાં નાની સંખ્યા વડે ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે ? આ ભાગફળનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

જો 9408ને અવયવ 3 વડે ભાગીએ તો

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ જે પૂર્ણવર્ગ છે. (કેમ ?)

માટે, અપેક્ષિત નાનામાં નાની સંખ્યા 3 છે.

અને $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ઉદાહરણ 8 : સંખ્યાઓ 6, 9 અને 15 થી નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : આ ઉદાહરણને આપણે બે સોપાનમાં ઉકેલીશું. સૌપ્રથમ આપણે નાનામાં નાનો સામાન્ય અવયવી શોધીશું અને ત્યારબાદ જરૂરી પૂર્ણવર્ગ શોધીશું. 6, 9, 15થી નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની સંખ્યા તેમનો લ.સા.અ. છે. 6, 9 અને 15નો લ.સા.અ. $2 \times \underline{3 \times 3} \times 5 = 90$ છે.

90ના અવિભાજ્ય અવયવો $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$

અહીં અવિભાજ્ય અવયવો 2 અને 5 જોડીમાં નથી. તેથી 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મેળવવા માટે 90નો દરેક અવયવ જોડીમાં હોવો જરૂરી છે. તેથી આપણે 2 અને 5 ની જોડી બનાવવી પડશે. તેથી આપણે 90ને 2×5 એટલે કે 10 વડે ગુણીશું.

તેથી અપેક્ષિત પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા $90 \times 10 = 900$ છે.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓના વર્ગમૂળમાં એકમનો અંક કયો હશે ?
(i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025

2. કોઈ પણ પ્રકારની ગણતરી કર્યા વિના જ જણાવો કે નીચેના પૈકી કઈ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ નથી ?
(i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441

3. પુનરાવર્તીત બાદબાકીની રીતે 100 અને 169નું વર્ગમૂળ શોધો.

4. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.
(i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
(v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
(ix) 529 (x) 8100

5. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યા માટે નાનામાં નાની એવી સંખ્યા શોધો કે જેના વડે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળતી આ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.
(i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
(v) 1458 (vi) 768

6. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યા માટે નાનામાં નાની એવી સંખ્યા શોધો કે જેના વડે ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળેલી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.
(i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
(v) 2800 (vi) 1620

7. એક નિશાળના ધોરણ 8ના તમામ વિદ્યાર્થીઓ મળીને ₹ 2401 પ્રધાનમંત્રી રાષ્ટ્રીય રાહત ફંડમાં ફાળો આપે છે. વર્ગમાં જેટલી સંખ્યા છે તેટલા રૂપિયા દરેક વિદ્યાર્થી દાનમાં આપે છે, તો વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી હશે ?

8. એક બગીચામાં 2025 છોડ એવી રીતે રોપેલ છે કે પ્રત્યેક હારમાં રોપેલા છોડની સંખ્યા કુલ હારની સંખ્યા બરાબર થાય. તો પ્રત્યેક હારમાં રોપેલ છોડ અને કુલ હારની સંખ્યા શોધો.

9. 4, 9 અને 10 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

10. 8, 15 અને 20 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

5.5.4 ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધવું

જ્યારે કોઈ સંખ્યા ઘણી મોટી હોય, ત્યારે અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીત ખૂબ જ લાંબી અને મુશ્કેલ બને છે. આ સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ભાગાકારની રીત અપનાવીશું.

આ માટે આપણે નીચે આપેલ સંખ્યાના વર્ગમૂળનાં કેટલા અંકો છે તે જોઈએ.
નીચેનું કોષ્ટક જુઓ :

સંખ્યા	વર્ગ	વિશેષતા
10	100	તે ત્રણ અંકોની નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
31	961	તે ત્રણ અંકોની મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
32	1024	તે ચાર અંકોની નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
99	9801	તે ચાર અંકોની મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

તેથી, જો આપેલ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 3 અથવા 4 અંકોથી બનતી સંખ્યા હોય, તો સંખ્યાના વર્ગમૂળના અંકોની સંખ્યા વિશે આપણે શું કહી શકીએ ? આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 3 અથવા 4 અંકોથી બનેલી હોય, તો તેના વર્ગમૂળની સંખ્યા 2 અંકોથી બનેલી હોય.

શું તમે 5 અંકો અથવા 6 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યાના અંકો વિશે કહી શકો ?

નાનામાં નાની 3 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 100 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 10 છે. જ્યારે મોટામાં મોટી 3 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 961 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 31 છે. નાનામાં નાની 4 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 1024 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 32 છે જ્યારે મોટામાં મોટી 4 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 9801 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 99 છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

શું આપણે એમ કહી શકીએ કે, n અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યા જો n બેકી હોય, તો $\frac{n}{2}$ અંક મળે અને જો એકી હોય તો $\frac{(n+1)}{2}$ અંક મળે.

કોઈ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યાના કેટલા અંકો મળે તેનો ઉપયોગ નીચેની પદ્ધતિમાં કરી શકાય :

- 529નું વર્ગમૂળ શોધવા માટે નીચેનાં પગલાં વિચારીએ :

શું તમે 529નું વર્ગમૂળ શોધતાં મળતી સંખ્યાના અંકો વિશે અનુમાન કરી શકો ?

સોપાન 1 આપેલી સંખ્યાના એકમના અંકથી શરૂ કરી સંખ્યાની જોડી બનાવવા માટે તેની ઉપરની બાજુ લીટી દોરો. જો આપેલી સંખ્યાના અંકોની સંખ્યા એકી હોય તો સંખ્યાની ડાબી બાજુના છેલ્લા એક અંક પર પણ લીટી દોરો. તેથી આપણી પાસે $\overline{5}\,\overline{29}$ મળે.

સોપાન 2 હવે આપેલી સંખ્યાની સૌથી ડાબી બાજુ આવેલી જોડી માટે સૌથી મોટી એવી સંખ્યા શોધો કે જેનો વર્ગ આપેલ જોડી જેટલો હોય કે તેથી નાનો હોય ($2^2 < 5 < 3^2$). આ સંખ્યાને ભાજક તરીકે લો અને સૌથી ડાબી બાજુ આપેલી આ જોડીને ભાજ્ય (અહીં 5) તરીકે લઈ ભાગફળ મેળવો. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો (આ કિસ્સામાં શેષ 1 છે.)

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 129 \end{array}$$

સોપાન 3 ત્યાર પછી આવતી જોડીને મળેલ શેષની જમણી બાજુએ નીચે ઉતારો. તેથી નવો ભાજ્ય 129 મળે છે.

સોપાન 4 ભાજકને બમણો કરો અને તેની જમણી બાજુ ખાલી જગ્યા મૂકો.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4\_ & 1\,29 \end{array}$$

સોપાન 5 હવે ખાલીજગ્યામાં એવો મોટામાં મોટો અંક પસંદ કરો કે, જે ભાગફળનો નવો અંક બને અને તેના નવા ભાજક સાથેનો ગુણાકાર ભાજ્ય કરતાં નાનો અથવા ભાજ્ય જેટલો થાય. આ કિસ્સામાં $42 \times 2 = 84$
અને $43 \times 3 = 129$. તેથી આપણે નવી સંખ્યા 3 પસંદ કરીશું.

$$\begin{array}{r|l} & 23 \\ 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 43 & 1\,29 \\ & -1\,29 \\ \hline & 0 \end{array}$$

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને આપેલ સંખ્યામાં કોઈ અંકો પણ બાકી રહેતા નથી.
તેથી, $\sqrt{529} = 23$

- હવે સંખ્યા $\sqrt{4096}$ ના વર્ગમૂળ માટે વિચારો.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 4 \end{array}$$

સોપાન 1 એકમના અંકથી શરૂ કરી જોડીઓ બનાવવા માટે લીટીઓ દોરો, (અહીં $\overline{40}\,\overline{96}$).

સોપાન 2 આપેલી સંખ્યામાં સૌથી ડાબી બાજુ આપેલ જોડી માટે એવી મોટામાં મોટી સંખ્યા શોધો કે જેનો વર્ગ આપેલ જોડી જેટલો અથવા નાનો હોય (અહીં $6^2 < 40 < 7^2$). આ નંબરને ભાજક તરીકે લો અને સૌથી ડાબી બાજુ આવેલ જોડીની સંખ્યાને ભાજ્ય તરીકે લો. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો. અહીં આ કિસ્સામાં શેષ 4 છે.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 496 \end{array}$$

સોપાન 3 હવે બીજી જોડીને નીચે ઉતારો (અહીં બીજી જોડી 96 છે). જેને શેષની બાજુમાં જોડતાં ભાજ્ય સંખ્યા 496 બને.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\_ & 496 \end{array}$$

સોપાન 4 ભાજકને બમણા કરો અને તેની જમણી બાજુ ખાલી જગ્યા મૂકો.

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 124 & 496 \\ & -496 \\ \hline & 0 \end{array}$$

સોપાન 5 હવે ખાલીજગ્યામાં એવો મોટામાં મોટો અંક પસંદ કરો, કે જે નવી ભાગફળનો નવો અંક બને અને તેનો નવા ભાજક સાથેનો ગુણાકાર ભાજ્ય કરતાં નાનો અથવા ભાજ્ય જેટલો થાય. આ કિસ્સામાં $124 \times 4 = 496$
તેથી આપણને ભાગફળમાં નવી સંખ્યા 4 મળે છે અને શેષ મેળવો.

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને કોઈ જોડી બાકી રહેતી નથી. $\therefore \sqrt{4096} = 64$

સંખ્યાનું અનુમાન કરવું

આપણે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓમાં બનાવેલ જોડીઓની મદદથી તેના વર્ગમૂળની સંખ્યાનો અંક શોધીશું.

$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23$ અને $\sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$

આ બંને સંખ્યાઓ 529 અને 4096માં બે-બે જોડીઓ છે તેમજ બંને સંખ્યાઓના વર્ગમૂળ તરીકે આવતી સંખ્યાના અંકો પણ બે છે. શું તમે 14400 સંખ્યાના વર્ગમૂળ તરીકે જે સંખ્યા આવશે તેના અંકોની સંખ્યા કહી શકો ?

સંખ્યા $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ માં જોડીઓ ત્રણ છે. જેથી તેના વર્ગમૂળ તરીકે જે સંખ્યા આવશે તેના અંકો પણ ત્રણ જ હશે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધ્યા વિના જણાવો કે, મળતા વર્ગમૂળના અંકોની સંખ્યા કેટલી હશે ?

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

ઉદાહરણ 9 : વર્ગમૂળ શોધો : (i) 729 (ii) 1296

ઉકેલ : (i)

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 47 & 329 \\ & -329 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\sqrt{729} = 27$

(ii)

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 3 & \overline{12}\,\overline{96} \\ & -9 \\ \hline 66 & 396 \\ & -396 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\sqrt{1296} = 36$

ઉદાહરણ 10 : એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેને 5607માંથી બાદ કરતાં મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : ચાલો, 5607નું ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધીએ. આપણને શેષ 131 મળે છે. જે દર્શાવે છે કે 74^2 એ 5607 થી 131 નાનો છે. અર્થાત્ જો આપણે 131ને 5607માંથી બાદ કરીએ તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

$$\begin{array}{r|l} & 74 \\ \hline 7 & \overline{56}\,\overline{07} \\ & -49 \\ \hline 144 & 707 \\ & -576 \\ \hline & 131 \end{array}$$

આમ, નવી મળતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 5607 – 131 = 5476 છે અને $\sqrt{5476} = 74$

ઉદાહરણ 11 : 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી સંખ્યા 9999 છે. સૌ પ્રથમ આપણે $\sqrt{9999}$ ભાગાકારની રીતે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ. અહીં શેષ 198 મળે છે. જે દર્શાવે છે કે 99^2 એ 9999 કરતાં 198 નાનો છે.

$$\begin{array}{r|l} & 99 \\ \hline 9 & \overline{99}\,\overline{99} \\ & -81 \\ \hline 189 & 1899 \\ & -1701 \\ \hline & 198 \end{array}$$

અર્થાત્ 9999માંથી શેષ 198 બાદ કરતાં આપણને પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે. આમ, 9999 – 198 = 9801 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

ઉપરાંત $\sqrt{9801} = 99$

તેથી 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 9801 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 99 છે.

ઉદાહરણ 12 : એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેને 1300માં ઉમેરતાં મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી મળતી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે 1300નું વર્ગમૂળ ભાગાકારની રીતે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ. આમ, આ રીતે વર્ગમૂળ શોધતાં શેષ 4 મળે છે. આ બતાવે છે $36^2 < 1300$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 3 & \overline{13}\,\overline{00} \\ & -9 \\ \hline 66 & 400 \\ & -396 \\ \hline & 4 \end{array}$$

તેથી 1300 પછીની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 37^2 = 1369 છે.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે $37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$.

5.6 દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ

વિચારો કે $\sqrt{17.64}$ શું મળે ?

સોપાન 1 દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધવા માટે આપણે પૂર્ણાંક ભાગમાં ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધવા જેમ જોડીઓ બનાવવા લીટી કરીએ છીએ તેમ જ કરીશું. (અહીં, 17) અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા માટે દશાંશ ચિહ્નની જમણી બાજુના પ્રથમ અંકથી જ લીટીઓ કરી જોડીઓ બનાવીશું. (અહીં 64) અને આગળ જોડીઓ બનાવવા લીટી દોરીશું.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}\,\overline{64} \\ & -16 \\ \hline & 1 \end{array}$$

સોપાન 2 હવે આપણે ભાગાકારની રીતે જ આગળ વધીશું. ડાબી બાજુની સૌ પ્રથમ સંખ્યા 17 અને $4^2 < 17 < 5^2$. આથી 4 ને ભાજક તરીકે અને ડાબી બાજુની સૌ પ્રથમ જોડી 17 ને ભાજ્ય તરીકે લેવામાં આવે છે. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 8\_ & 164 \end{array}$$

સોપાન 3 શેષ 1 વધે છે. હવે પછીથી આવતી જોડીની સંખ્યાને શેષ 1ની બાજુમાં લખો. અહીં શેષ 1 અને પછીની જોડીની સંખ્યા 64 છે. તેથી આપણને સંખ્યા 164 મળે.

$$\begin{array}{r|l} & 4. \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \end{array}$$

સોપાન 4 ભાજકને બમણું કરો. ઉપરાંત 64 એ દશાંશ વિભાગમાં આવેલ છે તેથી ભાગફળમાં દશાંશ ચિહ્ન મૂકો.

સોપાન 5 આપણે જાણીએ છીએ કે, $82 \times 2 = 164$ તેથી નવો અંક 2 છે. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો.

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે કોઈ જોડીઓ બાકી રહેતી નથી.

તેથી $\sqrt{17.64} = 4.2$

$$\begin{array}{r|r} & 4.2 \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \\ & -\ 164 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ઉદાહરણ 13 : 12.25નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ :

$$\begin{array}{r|r} & 3.5 \\ \hline 3 & \overline{12}.\overline{25} \\ & -9 \\ \hline 65 & 325 \\ & -\ 325 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \therefore \sqrt{12.25} = 3.5$$

આગળ કઈ રીતે વધીશું ?

સંખ્યા 176.341 માટે વિચારો. પૂર્ણાંક ભાગ અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા લીટીઓ મૂકો. શું પૂર્ણાંક ભાગ અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા લીટીઓ મૂકવાની રીત જુદી-જુદી છે ? વિચારો. અહીં તમે જોયું હશે કે પૂર્ણાંક ભાગ 176માં જોડીઓ બનાવવા માટે એકમના સ્થાનથી શરૂ કરી જોડીઓ માટે લીટીઓ દોરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ ડાબી તરફ આગળ વધવામાં આવે છે. પ્રથમ લીટી 76 પર અને બીજી લીટી 1 પર કરવામાં આવે છે, પરંતુ .341 માટે એટલે કે દશાંશ ભાગમાં આપણે લીટીઓ દોરવાની શરૂઆત દશાંશ ચિહ્ન પછી તરત જ જમણી તરફથી કરીશું અને આગળ વધીશું. તેથી પ્રથમ લીટી 34 પર અને બીજી જોડી માટે આપણે 1 પછી 0 મૂકી અને લીટી દોરીશું. તેથી $.\overline{34}\,\overline{10}$ સંખ્યા મળે.

ઉદાહરણ 14 : એક ચોરસ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ 2304 મીટર^2 છે. તો આ ચોરસ પ્લોટની બાજુનું માપ શોધો.

$$\begin{array}{r|r} & 48 \\ \hline 4 & \overline{23}\,\overline{04} \\ & -\ 16 \\ \hline 88 & 704 \\ & -\ 704 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ઉકેલ : ચોરસ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ = 2304 મીટર^2

તેથી ચોરસ પ્લોટની બાજુ = $\sqrt{2304}$ મીટર

પરંતુ $\sqrt{2304} = 48$

આમ, 2304 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં ચોરસ પ્લોટની બાજુનું માપ 48 મીટર હોય.

ઉદાહરણ 15 : એક નિશાળમાં કુલ 2401 વિદ્યાર્થીઓ છે. આ નિશાળના વ્યાયામ શિક્ષક તમામ વિદ્યાર્થીઓને એવી રીતે હાર અને સ્તંભમાં ઊભા રાખવા માંગે છે કે, હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન હોય. તો હારની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હારની સંખ્યા x છે. તેથી સ્તંભની સંખ્યા પણ x મળે. તેથી
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= x \times x = x^2$ તેથી $x^2 = 2401$
હવે 2401નું વર્ગમૂળ શોધતાં 49 મળે છે.
આમ, $x = 49$
તેથી હારની સંખ્યા 49 મળે.

$$\begin{array}{r|l} & 49 \\ \hline 4 & \overline{24}\,\overline{01} \\ & -16 \\ \hline 89 & 801 \\ & -801 \\ \hline & 0 \end{array}$$

સ્વાધ્યાય 5.4

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધો :

(i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529
(v) 3249 (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921
(ix) 576 (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900

2. નીચે આપેલી સંખ્યાના વર્ગમૂળ તરીકે આવતી સંખ્યામાં કેટલા અંકો હશે તે જણાવો (કોઈ ગણતરી કર્યા વગર જણાવો).

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
(v) 390625

3. નીચે આપેલ દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધો :

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25
(v) 31.36

4. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ માટે એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેની આપેલ સંખ્યામાંથી બાદબાકી કરતાં મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250
(iv) 825 (v) 4000

5. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ માટે એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેનો સરવાળો આપેલ સંખ્યા સાથે કરવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો :

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
(v) 6412

6. 441 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ વાળા ચોરસની બાજુનું માપ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં, $\angle B = 90°$ છે.

(i) જો AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી, તો AC શોધો.

(ii) જો AC = 13 સેમી, BC = 5 સેમી, તો AB શોધો.

8. એક માળી પાસે 1000 છોડ છે. તે આ છોડને એવી રીતે રોપવા માગે છે કે બગીચામાં હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન મળે, તો માળીને તેના માટે હજુ ઓછામાં ઓછા કેટલા છોડ વધુ જોઈએ ?

9. એક નિશાળમાં 500 વિદ્યાર્થીઓ છે. પી.ટી.ની કવાયત કરવા માટે તમામ વિદ્યાર્થીઓને એવી રીતે ઊભા રાખ્યા છે કે જેથી હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન રહે. તો નિશાળના કેટલા વિદ્યાર્થીઓ આ ગોઠવણી કરવાથી બહાર રહેશે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા mને n^2 વડે દર્શાવી શકાય અને n પણ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, તો સંખ્યા m એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
2. બધી જ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓના એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 હોય.
3. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યામાં છેલ્લે આવેલાં શૂન્યો હંમેશાં બેકી સંખ્યામાં જ હોય.
4. વર્ગ અને વર્ગમૂળ પ્રક્રિયા એકબીજાની વ્યસ્ત છે.
5. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળ બે હોય છે.

   ધન વર્ગમૂળને "$\sqrt{\ }$" વડે દર્શાવાય છે.

   જેમ કે $3^2 = 9$ એટલે $\sqrt{9} = 3$.

પ્રકરણ
6

ઘન અને ઘનમૂળ

GTQRBF

6.1 પ્રાસ્તાવિક

ભારતના મહાન અને મેધાવી ગણિતશાસ્ત્રી એસ. રામાનુજન વિશે એક રસપ્રદ વાર્તા પ્રચલિત છે. એકવાર એક બીજા પ્રખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રી પ્રોફેસર જી. એચ. હાર્ડી, એસ. રામાનુજનને મળવા આવેલ હતા. તે જે વાહનમાં (ટેક્સી) આવેલ તે વાહન પર 1729 અંક લખેલ હતો. બંને ગણિતશાસ્ત્રી જ્યારે ચર્ચા કરતા હતા ત્યારે વાત વાતમાં પ્રોફેસર હાર્ડીએ 1729 અંકને 'ડલ અંક' (A Dull Number) તરીકે રજૂ કર્યો. એસ. રામાનુજને પ્રત્યુત્તરમાં કહ્યું કે 1729 એક ખરેખર રસપ્રદ અંક છે. તેમણે નીચે મુજબ ગણતરી કરી જણાવ્યું કે 1729 એક એવો સૌથી નાનામાં નાનો અંક છે કે, જેને જુદી જુદી બે સંખ્યાના ઘનના સરવાળા તરીકે બે રીતે રજૂ કરી શકાય. તેમણે નીચે મુજબ રજૂઆત કરી બતાવી.

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

ત્યારથી 1729 એ હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા તરીકે હાલ પણ પ્રચલિત છે. જો કે અંક 1729 ની આ ખાસિયત તો રામાનુજનના સમય પહેલાં 300 થી પણ વધારે વર્ષોથી જાણીતી હતી.

હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા

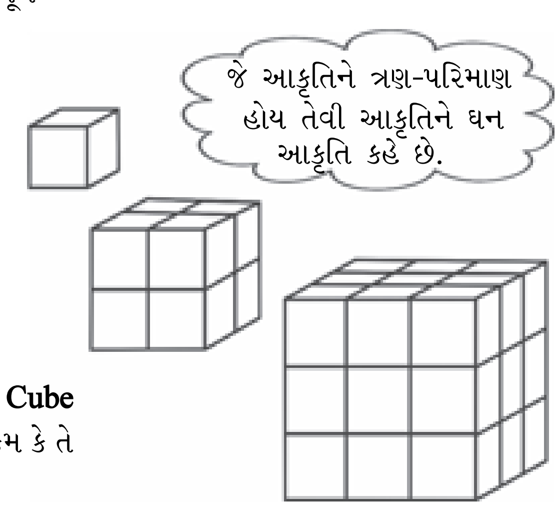
1729 એ નાનામાં નાની હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા છે. આવી ઘણી બધી સંખ્યાઓ હોય છે. જેમ કે 4104 (2, 16; 9, 15) 13832 (18, 20; 2, 24), કૌંસમાં આપેલ સંખ્યાનો ઉપયોગ કરી ચકાસો.

તમને કદાચ પ્રશ્ન થશે કે એસ. રામાનુજનને આ ખબર કેમ પડી ? તેનો જવાબ એ છે કે એસ. રામાનુજનને અંકો બહુ જ ગમતા હતા. તેઓએ પોતાના જીવનમાં અંકો સાથે ઘણા બધા પ્રયોગો કર્યા. તેમણે એવા ઘણા અંકો શોધી કાઢ્યા કે તેને કોઈ બે જુદી જુદી સંખ્યાના વર્ગના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય અને સાથે સાથે તેને બે જુદી જુદી સંખ્યાના ઘનના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

અહીં ઘન માટે ઘણી રસપ્રદ પેટર્ન છે. ચાલો આપણે ઘન અને ઘનમૂળ તેમજ તેની સાથે જ જોડાયેલ બીજી રસપ્રદ જાણકારી મેળવીએ.

6.2 ઘન (Cubes)

આપણે જાણીએ છીએ કે 'ઘન' શબ્દનો ઉપયોગ ભૂમિતિમાં થાય છે. ઘન એ એવી નક્કર આકૃતિ છે કે, જેની તમામ બાજુઓનાં માપ સમાન હોય છે. 1 સેમી બાજુવાળા કેટલા ઘનની મદદથી 2 સેમી બાજુવાળો એક ઘન બને ? 1 સેમી બાજુવાળા કેટલા ઘનની મદદથી 3 સેમી બાજુવાળો એક ઘન બને ? 1, 8, 27, ... સંખ્યાઓ માટે વિચારો.



આવી સંખ્યાઓને **'પૂર્ણઘન કે ઘન સંખ્યા' (Perfect Cubes or Cube Numbers)** કહે છે. તમે કહી શકો કે તેનું નામ ઘન સંખ્યા કેમ છે ? કેમ કે તે એક જ સંખ્યાને પોતાની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી પ્રાપ્ત થાય છે.

આપણે નોંધીએ કે $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$; $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$. અહીં, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે 125 એ એક ઘન સંખ્યા છે.

શું 9 એ ઘન સંખ્યા છે ? ના, કેમ કે $9 = 3 \times 3$ અને એવી કોઈ બીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી કે જેને પોતાની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી સંખ્યા 9 આવે. આ ઉપરાંત આપણે જાણીએ છીએ કે $2 \times 2 \times 2 = 8$ અને $3 \times 3 \times 3 = 27$. તેથી કહી શકાય કે 9 એ ઘન સંખ્યા નથી.

નીચેના કોષ્ટક-1માં 1 થી 10 સંખ્યાના ઘન આપેલ છે.

કોષ્ટક-1

729, 1000, 1728 પણ પૂર્ણઘન છે.

સંખ્યા	ઘન
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ ....
6	$6^3 =$ ....
7	$7^3 =$ ....
8	$8^3 =$ ....
9	$9^3 =$ ....
10	$10^3 =$ ....

પૂર્ણ કરો.

1 થી 1000 સુધીની સંખ્યાઓમાં ફક્ત દસ સંખ્યાઓ જ એવી છે કે જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. (તમે જાતે ચકાસણી કરો). 1 થી 100 સુધીની સંખ્યાઓમાં કેટલી સંખ્યાઓ એવી છે કે જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

બેકી સંખ્યાઓના ઘનનું નિરીક્ષણ કરો. શું તે બેકી સંખ્યા જ છે ? એકી સંખ્યાઓના ઘન વિશે તમે શું કહી શકો છો ?

નીચે કોષ્ટક-2માં 11 થી 20 સંખ્યાઓના ઘન આપેલ છે.

કોષ્ટક-2

સંખ્યાઓ	ઘન
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

અમે બેકી, તેથી અમારા ઘન પણ બેકી

અમે એકી, તેથી અમારા ઘન પણ એકી

એવી સંખ્યા વિચારો કે જેનો એકમનો અંક 1 હોય. આવી સંખ્યાનો ઘન શોધો. જેનો એકમનો અંક 1 હોય તેવી સંખ્યાના ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાના એકમના અંક વિશે તમે શું કહી શકો ?
તેવી જ રીતે એકમનો અંક 2, 3, 4... વગેરે હોય તેવી અન્ય સંખ્યાઓ લઈ તેનો ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાના એકમના અંક વિશે વિચારો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાના ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શોધો.

(i) 3331	(ii) 8888	(iii) 149	(iv) 1005
(v) 1024	(vi) 77	(vii) 5022	(viii) 53

6.2.1 કેટલીક રસપ્રદ પૅટર્ન (Patterns)

1. ક્રમિક એકી સંખ્યા ઉમેરવી

નીચે આપેલી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળાની પૅટર્ન જુઓ.

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

શું આ રસપ્રદ નથી ? હવે તમે કહી શકો કે 10^3ને ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવવા કેટલી ક્રમિક એકી સંખ્યા જોઈએ ?

પ્રયત્ન કરો

ઉપરની જેવી પૅટર્નનો ઉપયોગ કરી નીચે આપેલ સંખ્યાને ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

નીચેની પૅટર્ન જુઓ.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

ઉપરની પૅટર્ન જોઈ નીચેની સંખ્યાની કિંમત શોધો.

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. ઘન અને તેના અવિભાજ્ય અવયવ (Cube and their Prime Factors)

નીચે આપેલ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ અને તેના ઘન વિશે વિચારો.

> ઘનમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ ત્રણ વાર આવે છે.

સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવ	સંખ્યાના ઘનના અવિભાજ્ય અવયવ
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ખાસ નોંધો કે દરેક અવિભાજ્ય અવયવ ઘનના અવયવીકરણ વખતે ત્રણ વાર આવે છે.

શું તમને યાદ છે કે, $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

કોઈ પણ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ વખતે જો દરેક અવયવ ત્રણ વાર આવે તો શું તે સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય ? વિચારો શું 216 પૂર્ણઘન છે ?

અહીં, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

દરેક અવયવ ત્રણ વાર આવે છે $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

$= 6^3$ તે પૂર્ણઘન છે.

શું 729 પૂર્ણઘન છે ? અહીં $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

અવયવોના ત્રણનાં જોડકાં બનાવી શકાય.

હા, 729 એ પૂર્ણઘન છે.

ચાલો 500 માટે ચકાસણી કરીએ.

500ના અવિભાજ્ય અવયવો $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ છે.

તેથી 500 પૂર્ણઘન નથી.

અવયવ 5 ત્રણ વાર આવે છે. પણ અવયવ 2 બે જ વાર આવે.

ઉદાહરણ 1 : શું 243 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

તેથી 243 પૂર્ણઘન નથી. કેમ કે અવયવ 3 ત્રણ વાર આવે છે, પરંતુ બીજી વાર અવયવ 3 માત્ર બે જ વાર છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન છે ?

1. 400 **2.** 3375 **3.** 8000 **4.** 15625

5. 9000 **6.** 6859 **7.** 2025 **8.** 10648

6.2.2 નાનામાં નાનો ગુણક કે જેથી પૂર્ણ ઘન સંખ્યા મળે

રાજે પ્લાસ્ટિકનો એક લંબઘન બનાવ્યો જેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 સેમી, 30 સેમી, 15 સેમી છે.

અનુએ રાજને પ્રશ્ન કર્યો કે આવા કેટલા લંબઘન સાથે મળે તો મળતો ઘન પૂર્ણઘન હોય ? શું રાજ તે તું કહી શકે ?

રાજે કહ્યું કે આપેલ લંબઘનનું ઘનફળ $15 \times 30 \times 15 = 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

અહીંયા મળેલ અવિભાજ્ય અવયવોમાં 2 માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી આપણે તે ત્રણ વાર આવે તે માટે 2×2 વડે ગુણવા જોઈએ. તેથી આવા 4 લંબઘન એકસાથે રાખવાથી મળતો ઘન એ પૂર્ણઘન હશે.

ઉદાહરણ 2 : શું 392 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે જેને 392 સાથે ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

અહીં અવિભાજ્ય અવયવ 7 એ ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી 392 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. તેને પૂર્ણઘન બનાવવા માટે હજુ એક વાર 7 જોઈએ. તેથી આ કિસ્સામાં

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ મળે, જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

તેથી 7 એ એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે કે જેને 392 સાથે ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા 2744 પૂર્ણઘન સંખ્યા મળે.

ઉદાહરણ 3 : શું 53240 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે, જેનાથી 53240ને ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : અહીં $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

આ અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 5 ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી કહી શકાય કે 53240 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. અવયવ 5 એ માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી જો આપણે આપેલ સંખ્યાને 5 વડે ભાગીએ તો મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન સંખ્યા હોય.

તેથી $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

તેથી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા 5 એવી સંખ્યા છે કે જેના વડે 53240ને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા 10648 એ પૂર્ણઘન હોય.

ઉદાહરણ 4 : શું 1188 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો, કે જેનાથી 1188ને ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : અહીં $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

આ અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 2 અને અવયવ 11 ત્રણ વાર આવતા નથી. તેથી સંખ્યા 1188 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. અહીં 1188ના અવયવીકરણમાં અવયવ 2 માત્ર બે જ વાર અને અવયવ 11 માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી જો 1188ને $2 \times 2 \times 11 = 44$ વડે ભાગતાં મળતા ભાગફળના અવિભાજ્ય અવયવ 2 અને 11 નહીં હોય.

આમ, નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા કે જેના વડે 1188 ને ભાગતાં પૂર્ણઘન મળે તે 44 છે અને પરિણામે મળતી પૂર્ણઘન સંખ્યા $1188 \div 44 = 27$ $(=3^3)$ છે.

ઉદાહરણ 5 : શું 68600 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે, જેનાથી 68600 ને ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.

ઉકેલ : અહીં $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$.

અહીં અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 5 એ ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી 68600 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. તેને પૂર્ણઘન બનાવવા માટે આપણે તેને 5 વડે ગુણીશું.

$68600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 343000$ જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

અહીં નોંધીએ કે 343 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. ઉદાહરણ 5 પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ કે 343000 પણ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

(i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10000 (ix) 27000000 (x) 1000

તમે આ પૂર્ણઘન સંખ્યાઓમાં કઈ પેટર્નનું નિરીક્ષણ કર્યું ?

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન નથી ?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656
2. એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેથી તેને નીચે આપેલ સંખ્યા સાથે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.
   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100
3. એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેના વડે નીચે આપેલ સંખ્યાને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.
   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704
4. પરિક્ષિતે 5 સેમી, 2 સેમી, 5 સેમી માપ લઈ એક પ્લાસ્ટિકનો લંબઘન બનાવ્યો છે. તો આવા કેટલા લંબઘન સાથે રાખવાથી મળતો ઘન એ પૂર્ણઘન હોય ?

6.3 ઘનમૂળ (Cube Roots)

જો એક ઘનનું ઘનફળ 125 સેમી^{3} હોય તો, આપણે તેની બાજુની લંબાઈ વિશે શું કહી શકીએ ? આ ઘનની બાજુની લંબાઈ જાણવા માટે આપણે એવી સંખ્યાની જરૂર પડે કે જે સંખ્યાનો ઘન 125 હોય.

જેવી રીતે વર્ગમૂળ શોધવું એ વર્ગ કરવાની પ્રક્રિયાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા છે, તેવી જ રીતે ઘનમૂળ શોધવાની ક્રિયા પણ ઘન કરવાની ક્રિયાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા છે.

આપણે જાણીએ છીએ $2^3 = 8$. તેથી 8નું ઘનમૂળ 2 છે.

સંકેતમાં તેને $\sqrt[3]{8} = 2$થી દર્શાવાય. ‘ $\sqrt[3]{\ }$ ’ ઘનમૂળનો સંકેત દર્શાવે છે.

નીચેના કોષ્ટક માટે વિચારો.

વિધાન	અનુમાન	વિધાન	અનુમાન
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$	$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$	$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

6.3.1 અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે ઘનમૂળ

સંખ્યા 3375 માટે વિચારો, આપણે તેનું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધીશું.

અહીં $3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$

તેથી 3375 નું ઘનમૂળ $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

તેવી જ રીતે $\sqrt[3]{74088}$ નું ઘનમૂળ મેળવવા માટે

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

આમ, $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

ઉદાહરણ 6 : 8000 નું ઘનમૂળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં 8000 ના અવિભાજ્ય અવયવો $\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{5\times5\times5}$ છે.

તેથી $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

ઉદાહરણ 7 : 13824 નું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.

ઉકેલ : અહીં,

$13824 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{3\times3\times3} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

તેથી, $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા m માટે, $m^2 < m^3$? આ વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે કહો.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યાનું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.

(i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000

(v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656

(ix) 175616 (x) 91125

2. નીચેનાં વિધાન ખરાં છે કે ખોટાં તે કહો :

(i) કોઈપણ એકી સંખ્યાનો ઘન બેકી સંખ્યા હોય.

(ii) પૂર્ણ ઘન સંખ્યાના અંતિમ બે અંકો શૂન્ય ન હોય.

(iii) જો કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ કરતાં એકમનો અંક 5 આવે તો ઘન કરતાં મળતી સંખ્યાના છેલ્લા બે અંક 25 આવે.

(iv) એવી કોઈ પૂર્ણઘન સંખ્યા ના મળે કે જેનો એકમનો અંક 8 હોય.

(v) બે અંકોવાળી સંખ્યાનો ઘન કરતાં મળતી સંખ્યા ત્રણ અંકોની પણ હોય.

(vi) બે અંકોવાળી સંખ્યાનો ઘન કરતાં સાત કે તેથી વધુ અંકોની સંખ્યા પણ મળે.

(vii) એક અંકની સંખ્યાનો ઘન કરવાથી એક અંકની સંખ્યા પણ મળે.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંખ્યાઓ જેવી કે 1729, 4104, 13832 એ **હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા** તરીકે જાણીતી છે. આવી સંખ્યાને બે સંખ્યાઓના ઘનના સરવાળા તરીકે બે અલગ રીતે રજૂ કરી શકાય.
2. કોઈ સંખ્યાને તેની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી મળતી સંખ્યાને તે **સંખ્યાનો ઘન** કહે છે જેમ કે 1, 8, 27, ... વગેરે.
3. જો કોઈ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દરેક અવયવ ત્રણવાર આવે તો તેવી સંખ્યા **પૂર્ણઘન સંખ્યા** હોય છે.
4. સંકેત ' $\sqrt[3]{\ }$ ' ને ઘનમૂળ કહે છે. જેમ કે $\sqrt[3]{27} = 3$.

GTZMD3

રાશિઓની તુલના

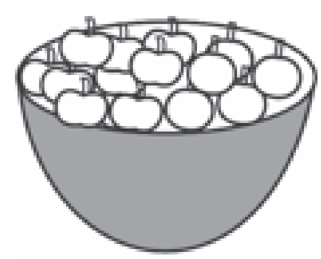
પ્રકરણ

7

7.1 ગુણોત્તર અને ટકાવારીનું પુનરાવર્તન

આપણને ખબર છે કે ગુણોત્તર એટલે બે રાશિઓની સરખામણી.

એક ટોપલીમાં બે પ્રકારનાં ફળો છે. તેમાં 20 સફરજન અને 5 નારંગી છે.



તો નારંગીની સંખ્યા અને સફરજનની સંખ્યાનો ગુણોત્તર = 5 : 20.

અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરી આ સરખામણી આ રીતે થઈ શકે $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

નારંગીની સંખ્યા એ સફરજનની સંખ્યા કરતાં $\frac{1}{4}$ જેટલી છે

ગુણોત્તરના રૂપમાં તે 1 : 4 લખાય અને ''1 જેમ 4'' એમ વંચાય છે.

અથવા

સફરજનની સંખ્યા અને નારંગીની સંખ્યાનો ગુણોત્તર $\frac{20}{5} = \frac{4}{1}$ એટલે કે સફરજનની સંખ્યા એ નારંગીની સંખ્યા કરતાં 4 ગણી છે.

આ સરખામણી ટકાવારી દ્વારા પણ થઈ શકે છે.

અહીં 25 ફળો પૈકી 5 નારંગી છે, તેથી નારંગીની ટકાવારી $\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$ [છેદમાં 100 લાવવા]	અથવા	એકમની રીતે : અહીં 25 ફળો પૈકી નારંગીની સંખ્યા 5 છે, તેથી 100 ફળોમાંથી નારંગીની સંખ્યા $\frac{5}{25} \times 100 = 20$

આમ,  ટોપલીમાં માત્ર સફરજન અને નારંગી જ હોય

તો સફરજનની ટકાવારી + નારંગીની ટકાવારી = 100

અથવા સફરજનની ટકાવારી + 20 = 100

અથવા સફરજનની ટકાવારી = 100 − 20 = 80

એટલે કે ટોપલીમાં 20% નારંગી અને 80% સફરજન છે.

ઉદાહરણ 1 : શાળામાં ધોરણ VII માટે પ્રવાસ નક્કી કરવામાં આવે છે. જેમાં કુલ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યામાંથી 60% છોકરીઓ છે અને તેમની સંખ્યા 18 છે.

પ્રવાસનું સ્થળ શાળાથી 55 કિમી દૂર છે અને પરિવહન સંસ્થા ₹ 12 પ્રતિ કિમી વસૂલ કરે છે. અલ્પાહારની કુલ કિંમત ₹ 4280 છે.

શું તમે કહી શકશો કે,

1. વર્ગમાં છોકરીઓની સંખ્યા અને છોકરાઓની સંખ્યાનો ગુણોત્તર કેટલો ?
2. જો બે શિક્ષકો વર્ગ સાથે જતાં હોય તો વ્યક્તિ દીઠ ખર્ચ કેટલો ?
3. જો પ્રવાસનું પ્રથમ વિરામ સ્થળ શાળાથી 22 કિમી દૂર હોય તો તે પ્રવાસના કુલ 55 કિમીના કેટલા ટકા થાય ? પ્રવાસમાં બાકી રહેલ અંતરની ટકાવારી શું થાય ?

ઉકેલ :

1. છોકરીઓ અને છોકરાઓનો ગુણોત્તર શોધવા માટે

આશિમા અને જ્હોન નીચે મુજબ જવાબ આપે છે.

તેમણે છોકરાઓની સંખ્યા અને વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા શોધવાની છે.

આશિમાની રીત

ધારો કે, વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા x છે.

x ના 60% છોકરીઓ છે.

$\therefore$ x ના 60% = 18

$\frac{60}{100} \times x = 18$

અથવા $x = \frac{18 \times 100}{60} = 30$

વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 30

અથવા

જ્હોને એકમની રીત વાપરી

100 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 60 છોકરીઓ છે.

$\frac{100}{60}$ વિદ્યાર્થીઓમાંથી 1 છોકરી છે,

તો કેટલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 18 છોકરીઓ હશે ?

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= \frac{100}{60} \times 18$

$= 30$

તેથી છોકરાઓની સંખ્યા = 30 − 18 = 12

હવે, છોકરીઓની સંખ્યા અને છોકરાઓની સંખ્યાનો ગુણોત્તર 18 : 12 અથવા $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ હશે.

જેને 3 : 2 લખાય અને "3 જેમ 2" વંચાય છે.

2. વ્યક્તિ દીઠ કિંમત શોધવા :

પરિવહનનો ખર્ચ = કુલ અંતર બંને તરફનું × ભાવ

= ₹ (55 × 2) × ₹ 12

= ₹ 110 × 12

= ₹ 1320

કુલ ખર્ચ = અલ્પાહારનો ખર્ચ + પરિવહનનો ખર્ચ

= ₹ 4280 + ₹ 1320

= ₹ 5600

કુલ વ્યક્તિઓ = 18 છોકરીઓ + 12 છોકરાઓ + 2 શિક્ષકો

= 32 વ્યક્તિઓ

પછી, આશિમા અને જ્હોને ત્રિરાશિની રીત વાપરીને માથા દીઠ કિંમત શોધી.

32 વ્યક્તિ માટે વપરાયેલી રકમ = ₹ 5600

તો એક વ્યક્તિ માટે વપરાયેલી રકમ $= \frac{5600}{32}$ = ₹ 175

3. પ્રથમ વિરામ સ્થળનું અંતર = 22 કિમી.

અંતરની ટકાવારી શોધવા માટે

આશિમાની રીત

$$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100}$$
$$= 40\%$$

[તેણે ગુણોત્તરનો ગુણાકાર $\frac{100}{100} = 1$ વડે કર્યો અને ટકાવારીમાં રૂપાંતર કર્યું.]

અથવા

જહોને એકમની રીત વાપરી

55 કિમીમાંથી 22 કિમી. અંતર કાપ્યું.

1 કિમીમાંથી $\frac{22}{55}$ કિમી. અંતર કાપ્યું

100 કિમીમાંથી $\frac{22}{55} \times 100$ કિમી અંતર કાપ્યું

કુલ અંતરનું 40% અંતર કાપ્યું.

બંને જવાબ સરખા છે. આમ, તેઓ જે સ્થળે પહોંચ્યા છે તે સ્થળનું શાળાથી અંતર (કુલ અંતરના) 40% છે.

$\therefore$ બાકીના અંતરની ટકાવારી

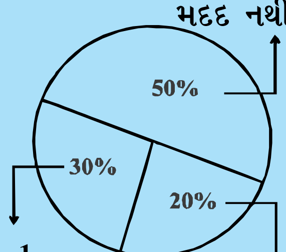
= 100% – 40% = 60%

પ્રયત્ન કરો

એક પ્રાથમિક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના વાલીઓને પૂછવામાં આવ્યું કે તેઓ એક દિવસમાં કેટલા કલાક તેઓના બાળકોને ગૃહકાર્યમાં મદદ કરે છે ?

90 વાલીઓ એવા હતા કે જેઓ પોતાના બાળકને $\frac{1}{2}$ થી $1\frac{1}{2}$ કલાક મદદ કરે છે. બાજુની આકૃતિમાં વાલીઓ પોતાના બાળકને મદદ કરવા જે સમય ફાળવે છે, તેના પરથી તેઓનું (વાલીની સંખ્યાનું) વિભાજન કરેલ છે.

20% વાલીઓ $1\frac{1}{2}$ કલાકથી વધારે સમય મદદ કરે છે, 30% વાલીઓ $\frac{1}{2}$ થી $1\frac{1}{2}$ કલાક મદદ કરે છે અને 50% વાલીઓ મદદ નથી કરતા.



આ પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) કુલ કેટલા વાલીઓનો સર્વે કરવામાં આવ્યો ?

(ii) કેટલા વાલીઓ મદદ જ નહોતા કરતા ?

(iii) કેટલા વાલીઓ $1\frac{1}{2}$ કલાકથી વધારે સમય મદદ કરતા હતા ?

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર શોધો.

(a) સાયકલની ઝડપ 15 કિમી/કલાક અને સ્કૂટરની ઝડપ 30 કિમી/કલાક

(b) 5 મીટર અને 10 કિમી (c) 50 પૈસા અને ₹ 5 રૂપિયા

2. નીચે આપેલ ગુણોત્તરોનું ટકાવારીમાં રૂપાંતર કરો.

(a) 3 : 4 (b) 2 : 3

3. 25 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 72% વિદ્યાર્થીઓ ગણિતમાં રસ લે છે, તો કેટલા વિદ્યાર્થી ગણિતમાં રસ લેતા નથી ?

4. એક ફૂટબૉલ ટીમ તેમણે રમેલી મૅચમાંથી 10 મૅચ જીતી હતી. જો તેમની જીતેલી મૅચની ટકાવારી 40% હોય તો તેઓ કુલ કેટલી મૅચ રમ્યા હશે ?

5. જો ચમેલી પાસે તેની રકમના 75% વાપર્યા પછી ₹ 600 બાકી રહ્યાં હોય, તો તેની પાસે શરૂઆતમાં કુલ કેટલી રકમ હશે ?

6. એક શહેરમાં કુલ વ્યક્તિમાંથી 60% વ્યક્તિઓને ક્રિકેટ , 30% વ્યક્તિઓને ફૂટબૉલ અને બાકીની ય તઓને બી રમતો ગમે છે, તો અન્ય રમતો પસંદ કરતા ય તઓની ટકાવારી કેટલી ? ` શહેરમાં કુલ 5 લાખ ય તઓ હોય તો પ્રત્યેક રમત પસંદ કરનાર ય તઓની કુલ સં યા કેટલી હશે ?

7.2 વળતર શોધવું (Findin iscounts)

વળતર એ વસ્તુની છાપેલ કિંમતમાં આપેલ ઘટાડો છે. આમ તો વળતર ગ્રાહકોને વસ્તુઓ ખરીદવા માટે આકર્ષવા અથવા વસ્તુઓનું વેચાણ વધારવા માટે હોય છે. આપણે, છાપેલી કિંમતમાંથી વેચાણ કિંમત બાદ કરીને વળતર શોધી શકીએ છીએ.

તેથી

વળતર = છાપેલી કિંમત – વેચાણ કિંમત

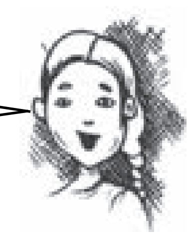
ઉદાહરણ 2 : એક વસ્તુની છાપેલી કિંમત ₹ 840 છે અને તેની વેચાણ કિંમત ₹ 714 છે, તો વળતર અને વળતરની ટકાવારી શું થાય ?

ઉકેલ : વળતર = છાપેલ કિંમત – વેચાણ કિંમત

= ₹ 840 – ₹ 714

= ₹ 126

વળતર છાપેલ કિંમત પર હોવાથી આપણે છાપેલ કિંમતને આધાર તરીકે લઈશું.



₹ 840ની છાપેલી કિંમત પર વળતર ₹ 126 છે.

₹ 100ની છાપેલી કિંમત પર વળતર કેટલું હશે ?

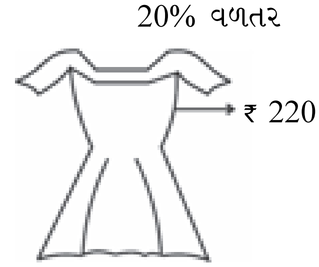
વળતરની ટકાવારી $= \frac{126}{840} \times 100$

$= 15\%$

જ્યારે વળતરની ટકાવારી આપી હોય ત્યારે પણ તમે વળતર શોધી શકો છો.

ઉદાહરણ 3 : ફ્રોકની યાદી મુજબની કિંમત ₹ 220 છે. વેચાણ પર 20% વળતર નક્કી કરેલ છે. તો ફ્રોક પર વળતર અને તેની વેચાણ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : યાદી મુજબની કિંમત અને છાપેલ કિંમત એક જ કહેવાય.



20% વળતર એટલે ₹ 100 (છા. કિં.) પર ₹ 20નું વળતર

ત્રિરાશિની રીતથી ₹ 1 પર વળતર ₹ $\frac{20}{100}$ છે.

તો ₹ 220 પર વળતર $= \frac{20}{100} \times 220 =$ ₹ 44

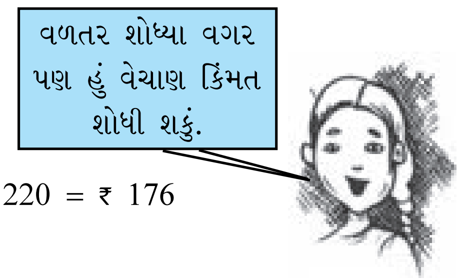
વેચાણ કિંમત = ₹ 220 – ₹ 44

= ₹ 176

રેહાનાએ વેચાણ કિંમત આ રીતે શોધી.

20% વળતર એટલે ₹ 100ની વેચાણ કિંમત પર ₹ 20નું વળતર. તેથી વેચાણ કિંમત ₹ 80 થશે.
ત્રિરાશિની રીતથી ₹ 100ની છાપેલી કિંમત હોય ત્યારે વેચાણ કિંમત ₹ 80 થશે.

જ્યારે છાપેલી કિંમત ₹ 1 હોય ત્યારે વેચાણ કિંમત ₹ $\frac{80}{100}$ થશે.



તો જ્યારે છાપેલી કિંમત ₹ 220 હોય ત્યારે વેચાણ કિંમત = ₹ $\frac{80}{100}$ × ₹ 220 = ₹ 176

પ્રયત્ન કરો

1. એક દુકાનદાર 20% વળતર આપે છે, તો નીચે આપેલી વસ્તુઓની વેચાણ કિંમત શું થશે ?
   (a) એક ડ્રેસ જેની છાપેલી કિંમત ₹ 120 છે.
   (b) એક જોડી બૂટ જેની છાપેલી કિંમત ₹ 750 છે.
   (c) એક થેલો જેની છાપેલી કિંમત ₹ 250 છે.
2. એક ટેબલ જેની છાપેલી કિંમત ₹ 15000 છે તે ₹ 14,400માં મળે છે. તેના પર મળેલ વળતર અને વળતરની ટકાવારી શોધો.
3. એક કબાટ 5% વળતર આપી ₹ 5,225માં વેચેલ છે તો તેની છાપેલ કિંમત શોધો.

7.2.1 ટકાવારીમાં અંદાજો

એક દુકાનનું તમારું બિલ ₹ 577.80 છે અને દુકાનદાર તમને 15% નું વળતર આપે છે. તમે ચૂકવવાના થતાં રૂપિયાનો અંદાજ કેવી રીતે મેળવશો ?

(i) ₹ 577.80ની રકમની નજીકના દશક સુધીની અંદાજિત કિંમત = ₹ 580

(ii) આ રકમના 10% શોધો.

અર્થાત્, ₹ $\frac{10}{100}$ × 580 = ₹ 58

(iii) આ રકમની અડધી રકમ એટલે $\frac{1}{2}$ × ₹ 58 = ₹ 29

(iv) (ii) અને (iii)ની રકમનો સરવાળો કરો. એટલે ₹ 87 મળશે.

આ રીતે તમને તમારા બિલમાં ₹ 87 અથવા ₹ 85 ની છૂટ મળી શકે અને બિલ પેટે ચૂકવવાની કિંમત આશરે ₹ 495 થશે.

(1) ઉપરોક્ત બિલ પર 20% લેખે વળતર શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

(2) ₹ 375ના 15% શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

7.3 GST (Goods and Service Tax) આધારિત પ્રશ્નો

શિક્ષકે વર્ગમાં બીલ બતાવી જેમાં નીચે મુજબનાં શિર્ષકો લખેલાં હતાં.

<table>
<tr><th colspan="3">બીલ નંબર</th><th colspan="2">તારીખ</th></tr>
<tr><th colspan="5">વિગત</th></tr>
<tr><th>અનુક્રમ નંબર</th><th>વસ્તુ</th><th>જથ્થો</th><th>દર</th><th>મૂલ્ય</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>બીલની રકમ
+ GST (5%)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>કુલ</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

વેચાણ કર (ST - Sales Tax) એ કોઈ પણ વસ્તુના વેચાણ ઉપર સરકાર દ્વારા વસુલવામાં આવતો કર છે. આ કર ગ્રાહક પાસેથી દુકાનદાર વસુલી અને સરકારમાં જમા કરાવે છે તે હમેંશા વસ્તુની વે.કિં. ઉપર જ ગણાય છે. જ્યારે મૂલ્ય વર્ધિત કર (VAT - Value Added Tax) એ વસ્તુની કિંમતમાં જ સમાવિષ્ટ હોય છે. તે અલગથી વસુલવામાં આવતો નથી.

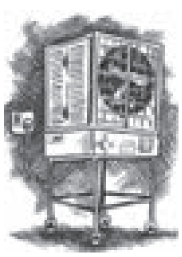
1 જુલાઈ, 2017 થી ભારત સરકારે ST, VAT, ... વિગેરે જેવા વિવિધ કરને બદલે એક જ પ્રકારનો કર લાગુ પાડેલ છે. જે વસ્તુ અને સેવા કર (GST - Goods And Service Tax) ના નામથી ઓળખાય છે. આ કર વસ્તુની કિંમત અથવા સેવા અથવા બંને ઉપર વસુલવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 4 : એક દુકાનમાં પૈડાંવાળા બૂટની એક જોડની કિંમત ₹ 450 હતી. તેના પર 5% GST લેવામાં આવ્યો. તો બિલની રકમ શોધો.

ઉકેલ : ₹ 100 પર ₹ 5નો GST લેવામાં આવ્યો હતો,

તો ₹ 450 પર કેટલો GST ભરવો પડે $= \frac{5}{100} \times 450$

$= ₹\ 22.50$



બિલ કિંમત = વસ્તુની કિંમત + GST = 450 + 22.50 = ₹ 472.50

ઉદાહરણ 5 : વહીદા ₹ 2240માં 12% GST સાથે એરકૂલરની ખરીદી કરે છે. તો ટેક્ષ લાગ્યા પહેલાની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : કિંમતમાં GST ઉમેરાય છે.

12% GST એટલે જો GST લગાવ્યા પહેલાની કિંમત ₹ 100 હોય તો GST લગાવ્યા સાથેની કિંમત ₹ 112 થાય.

હવે GST સાથેની કિંમત ₹ 112 ત્યારે મૂળકિંમત ₹ 100 હોય.

તો જ્યારે GST સાથેની કિંમત ₹ 2240 હોય તો મૂળકિંમત $= ₹\ \frac{100}{112} \times 2240 = ₹\ 2000$

ઉદાહરણ 6 : સલીમ એક વસ્તુ ₹ 784માં ખરીદે છે. જેમાં 12% GST સામેલ છે. તો GST ઉમેર્યા પહેલા આ વસ્તુની કિંમત શું હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે વસ્તુની મૂ.કિં. ₹ 100 છે. GST = 12% છે.

$\therefore$ GST સહિત વસ્તુની કિંમત = ₹ (100 + 12) = ₹ 112

આમ, વે.કિં. ₹ 112 હોય તો મૂ.કિં. = ₹ 100

$\therefore$ વે.કિં. ₹ 784 હોય તો મૂ.કિં. $= ₹\ (\frac{100}{112} \times 784) = ₹\ 700$ થાય.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કોઈ સંખ્યાની બમણી સંખ્યા એ 100%નો વધારો છે. જો આપણે તે સંખ્યાનો અડધો ભાગ લઈએ તો ટકાવારીમાં કેટલો ઘટાડો થશે ?
2. ₹ 2000 એ ₹ 2400 કરતાં કેટલા ટકા ઓછા છે ? ₹ 2400 એ ₹ 2000 કરતાં ટકાવારીમાં કેટલા વધુ છે ? શું બંને ફેરફાર સમાન છે ?

સ્વાધ્યાય 7.2

1. વેચાણ દરમ્યાન, એક દુકાનમાં બધી વસ્તુઓમાં છાપેલ કિંમત પર 10% વળતર મળતું હતું. તો એક ગ્રાહકને એક જોડી જીન્સ ₹ 1450 અને બે શર્ટ દરેકના ₹ 850ની છાપેલ કિંમત પર કેટલા રૂપિયા આપવા પડશે ?

2. એક T. V.ની કિંમત ₹ 13,000 છે. તેના પર 12% GST લગાડવામાં આવેલ છે. જો વિનોદને T.V. ખરીદવું હોય તો તેણે કેટલી રકમ ચૂકવવી પડે ?
3. અરુણે એક જોડી સ્કેટીંગ માટેના બૂટ 20%ના વળતર પર ખરીદ્યા. જો તેણે ₹ 1600 આપ્યા હોય તો તેની છાપેલ કિંમત શોધો.
4. મેં ₹ 5400 માં "હેર-ડ્રાયર" ખરીદ્યું. જેમાં 8 % GST લાગ્યો હતો. GST પહેલાંની કિંમત શોધો.
5. એક વસ્તુ 18% GST સાથે ₹ 1239 માં ખરીદવામાં આવે છે. વસ્તુની છાપેલી કિંમત શોધો.

7.4 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ (Com ound nterest)

તમે આવાં વાક્યો સાંભળ્યાં જ હશે. જેમકે " 'સ્થાયી થાપણ' (fixed deposit) માટે બૅંકમાં 9% લેખે પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ." અથવા "બચત ખાતામાં પ્રતિ વર્ષ 5% વ્યાજ."

વ્યાજ એટલે વધારાની રકમ જે આપણને બૅંક અને ડાકઘર જેવી સંસ્થા દ્વારા આપવામાં આવે છે (જ્યારે આપણે તેમાં પૈસા જમા કરીએ છીએ). લોકો જ્યારે પૈસા ઉધાર લે છે ત્યારે તેમણે વ્યાજ આપવું પડે છે. સાદું વ્યાજ ગણતાં આપણને આવડે છે.

ઉદાહરણ 7 : ₹ 10,000 ની રકમ, 15% પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ લેખે 2 વર્ષ માટે ઉછીની લેવામાં આવી છે. આ રકમ પર સાદું વ્યાજ અને વ્યાજમુદલ શોધો.

ઉકેલ : ₹ 100 પર એક વર્ષનું વ્યાજ ₹ 15 થશે.

તો ₹ 10,000 પર વ્યાજ $= \frac{15}{100} \times$ ₹ 10,000 = ₹ 1500

2 વર્ષનું વ્યાજ = ₹ 1500 × 2 = ₹ 3000

બે વર્ષના અંતે આપવાની રકમ (વ્યાજમુદલ) = મુદલ + વ્યાજ

= ₹ 10,000 + ₹ 3000 = ₹ 13,000

પ્રયત્ન કરો

₹ 15,000નું 5% પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ લેખે 2 વર્ષનું વ્યાજ અને વ્યાજ મુદલ શોધો.

મારા પપ્પાએ ડાકઘરમાં થોડા રૂપિયા 3 વર્ષ માટે મૂક્યા છે. દર વર્ષે આગલા વર્ષ કરતાં રૂપિયા વધે છે.

અમારી પાસે બૅંકમાં થોડા રૂપિયા છે. એમાં દર વર્ષે થોડું વ્યાજ ઉમેરાય છે. જે પાસબુકમાં જોઈ શકાય છે. આ વ્યાજ સરખું નથી, તે દર વર્ષે વધે છે.

સામાન્ય રીતે, જે વ્યાજ ચૂકવવામાં કે આપવામાં આવે છે તે ક્યારેય સાદું નથી હોતું. આ વ્યાજની ગણતરી આગલા વર્ષના વ્યાજમુદલ પર કરવામાં આવે છે. આ વ્યાજને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહેવાય છે.

ચાલો, એક ઉદાહરણ લઈએ અને વર્ષ દીઠ વ્યાજ શોધીએ. દર વર્ષે આપણી રકમ અથવા મુદ્દલ બદલાશે.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજની ગણતરી

હીનાએ ₹ 20,000ની રકમ વાર્ષિક 8% ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે લીધી. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ અને જે રકમ 2 વર્ષના અંતે આપવી પડશે એ કુલ રકમ શોધો.

અસલમે તેના શિક્ષકને પૂછ્યું કે, ''આનો અર્થ એમ કે તેણે વર્ષ-પ્રતિ વર્ષ (દર વર્ષનું) વ્યાજ શોધવું.'' શિક્ષકે જવાબ આપ્યો ''હા'' અને અસલમને આ પ્રમાણે કરવા કહ્યું.

1. સાદું વ્યાજ એક વર્ષ માટે શોધો.

   પ્રથમ વર્ષના મુદ્દલને આપણે P_1 કહીએ. અહીં P_1 = ₹ 20,000

   સાદું વ્યાજ (SI imp e nterest) = સાદું વ્યાજ 8% લેખે પ્રથમ વર્ષ માટે

   $$= \frac{20000 \times 8}{100} = ₹\ 1600$$

2. હવે, તેને આપેલ કે મેળવેલ વ્યાજમુદ્દલ શોધો. આ આપણા માટે પછીના વર્ષની મુદ્દલ બનશે.

   પ્રથમ વર્ષના અંતે રકમ = $P_1 + SI_1$ = ₹ 20,000 + ₹ 1600

   = ₹ 21,600 (બીજા વર્ષનું મુદ્દલ)

3. ફરી આ રકમ પર બીજા વર્ષનું વ્યાજ શોધો.

   SI_2 = સાદું વ્યાજ 8% લેખે બીજા વર્ષ માટે = ₹ $\frac{21600}{100} \times 8$

   = ₹ 1728

4. બીજા વર્ષના અંતે મેળવેલ કે ચૂકવેલ વ્યાજમુદ્દલ શોધો.

   બીજા વર્ષના અંતે વ્યાજમુદ્દલ = $P_2 + SI_2$

   = ₹ 21600 + ₹ 1728

   = ₹ 23328

   કુલ વ્યાજ = ₹ 1600 + ₹ 1728

   = ₹ 3328

રીટાએ પૂછ્યું આ રકમ સાદા વ્યાજ માટે જુદી હશે ? તો શિક્ષકે કહ્યું, ''બે વર્ષના અંતે વ્યાજ શોધો અને તમે પોતે જ ચકાસી લો.''

$$\text{સાદું વ્યાજ બે વર્ષ માટે} = \frac{20000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\ 3200$$

રીટાએ કહ્યું કે જ્યારે હીનાએ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે રકમ લીધી તો ₹ 128 વધારે આપવા પડ્યા.

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ અને સાદા વ્યાજ વચ્ચેનો તફાવત જુઓ. આપણે ₹ 100 થી શરૂ કરીએ.

		સાદા વ્યાજ હેઠળ	ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ હેઠળ
પ્રથમ વર્ષ	મુદ્દલ	₹ 100.00	₹ 100.00
	10% વ્યાજ	₹ 10.00	₹ 10.00
	વર્ષાંતે કિંમત	₹ 110.00	₹ 110.00
બીજું વર્ષ	મુદ્દલ	₹ 100.00	₹ 110.00
	10% વ્યાજ	₹ 10.00	₹ 11.00
	વર્ષાંતે કિંમત	₹ (110 + 10) = ₹ 120	₹ 121.00
ત્રીજું વર્ષ	મુદ્દલ	₹ 100.00	₹ 121.00
	10% વ્યાજ	₹ 10.00	₹ 12.10
	વર્ષાંતે કિંમત	₹ (120 + 10) = ₹ 130	₹ 133.10

એટલે કે, તમે વ્યાજનું પણ વ્યાજ ચૂકવો છો.

અહીં, નોંધ લઈએ કે 3 વર્ષમાં,

સાદા વ્યાજમાં મળતું વ્યાજ = ₹ 130 – ₹ 100 = ₹ 30

ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં મળતું વ્યાજ = ₹ 133.10 – ₹ 100 = ₹ 33.10

અહીં નોંધ લઈએ કે, સાદા વ્યાજમાં મુદ્દલની રકમ સરખી રહે છે, જ્યારે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં તે વર્ષ દીઠ બદલાય છે.

7.5 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના સૂત્રની તારવણી

ઝુબેદાએ શિક્ષકને પૂછ્યું, "શું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધવાનો કોઈ સરળ રસ્તો છે ?" શિક્ષકે કહ્યું, 'ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધવાનો સરળ રસ્તો છે. ચાલો તેને શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

ધારો કે P_1 એ રકમ છે, જેનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ R% પ્રતિ વર્ષ લેખે ગણવાનું છે.

તેથી P_1 = ₹ 5000, R = 5% પ્રતિ વર્ષ હવે ઉપરનાં સોપાનો પ્રમાણે

1. $SI_1 = ₹\ \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ અથવા $SI_1 = ₹\ \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

$A_1 = ₹\ 5000 + \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ અથવા $A_1 = P_1 + SI_1$

$= ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right) = P_2$

$= P_1 + \frac{P_1 R}{100}$

$= P_1\left(1 + \frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = ₹\ 5000 \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \frac{5 \times 1}{100}$ અથવા $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= ₹\ \frac{5000 \times 5}{100} \left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1 \left(1 + \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$

$= \frac{P_1 R}{100} \left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$A_2 = ₹\ 5000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)$ અથવા $A_2 = P_2 + SI_2$

$+ \frac{5000 \times 5}{100} \left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right) + \frac{P_1 R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right)$

$= ₹\ 5000 \left(1+\frac{5}{100}\right) \left(1+\frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1 \left(1+\frac{R}{100}\right) \cdot \left[1+\frac{R}{100}\right]$

$= ₹\ 5000 \left(\frac{1+5}{100}\right)^2 = P_3$ $\qquad = P_1 \left(1+\frac{R}{100}\right)^2 = P_3$

આ રીતે આગળ વધતાં, 'n' વર્ષના અંતે મળતી રકમ,

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

અથવા આપણે એમ પણ કહી શકીએ.

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

તેથી ઝુબેદાએ કહ્યું, પણ આનો ઉપયોગ કરીને આપણે માત્ર n વર્ષના અંતે ચૂકવેલ રકમનું સૂત્ર મેળવી શકીએ અને ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજનું (CI Compo nd nterest) સૂત્ર મેળવી શકતા નથી.

અરુણાએ કહ્યું, આપણે જાણીએ છીએ કે CI = A – P (mo nt rin ipa) તેથી આપણે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ સહેલાઈથી શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 8 : ₹ 12600 પર 10% પ્રતિ વર્ષના દરે 2 વર્ષ માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$ છે. જ્યાં P = ₹ 12600, R = 10, n = 2

$$A = 12600 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = ₹\ 12600 \left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$= 12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = ₹\ 15246$$

$$CI = A - P = ₹\ 15246 - ₹\ 12600 = ₹\ 2646$$

પ્રયત્ન કરો

1. ₹ 8000 પર 5% પ્રતિ વર્ષ વ્યાજ દરે 2 વર્ષ માટે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ શોધો.

7.6 ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના સૂત્રની ઉપયોગિતા

ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી છે જેમાં આપણે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ(CI)માં વ્યાજમુદ્દલની ગણતરી કરવા માટેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીએ. અહીં થોડાં ઉદાહરણો આપ્યાં છે.

(i) જનસંખ્યામાં વધારો (અથવા ઘટાડો)

(ii) જો વિકાસનો દર ખબર હોય તો બૅક્ટેરિયાનો વિકાસ જાણવા માટે.

(iii) કોઈ પણ વસ્તુનું મૂલ્ય જાણવા, જો મધ્યવર્તી વર્ષોમાં તેની કિંમતમાં વધારો અથવા ઘટાડો થતો હોય.

ઉદાહરણ 9 : એક શહેરની જનસંખ્યા વર્ષ 1997 માં 20,000 હતી. તે વર્ષ દીઠ 5%ના દરે વધતી હતી. તો વર્ષ 2000ના અંતે શહેરની જનસંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : અહીં જનસંખ્યામાં પ્રતિ વર્ષ 5%નો વધારો થાય છે. તેથી દર નવા વર્ષે નવી જનસંખ્યા મળે છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે વધારો ચક્રવૃદ્ધિ છે.

વર્ષ 1998 ની શરૂઆતમાં જનસંખ્યા = 20,000 (આને આપણે પ્રથમ વર્ષનું મુદ્દલ ગણીશું)

5% નો વધારો = $\frac{5}{100} \times 20{,}000 = 1000$

વર્ષ 1999 માં જનસંખ્યા = $20000 + 1000 = 21000$

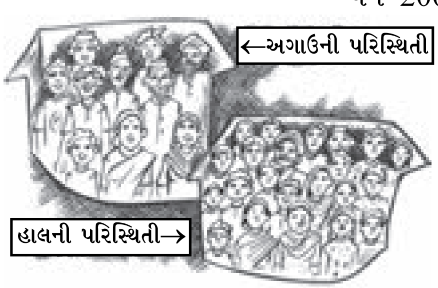
આને બીજા વર્ષ માટે મુદ્દલ લઈશું.

5% નો વધારો = $\frac{5}{100} \times 21000 = 1050$

વર્ષ 2000ની જનસંખ્યા = $21000 + 1050$

= 22050

આને ત્રીજા વર્ષ માટે મુદ્દલ લઈશું.



5% નો વધારો = $\frac{5}{100} \times 22050$

= 1102.5

વર્ષ 2000ના અંતે જનસંખ્યા = $22050 + 1102.5 = 23152.5$

અથવા, સૂત્રની રીતે

વર્ષ 2000ના અંતે જનસંખ્યા = $20000\left[1 + \frac{5}{100}\right]^3$

$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$

$= 23152.5$

તેથી અંદાજિત જનસંખ્યા = 23153

અરુણાએ પૂછ્યું કે ઘટાડો થયો હોય તો શું કરવું ? શિક્ષકે નીચે મુજબનું ઉદાહરણ આપ્યું.

ઉદાહરણ 10 : એક ટી.વી. ₹ 21,000 માં ખરીદવામાં આવ્યું હતું. એક વર્ષ પછી ટી.વી.ની કિંમતમાં 5% નો ઘટાડો થયો. એક વર્ષ પછીની ટી.વી.ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ :

મુદ્દલ = ₹ 21,000

ઘટાડો = વાર્ષિક ₹ 21,000ના 5%ના દરે

$$= \frac{21000 \times 5 \times 1}{100} = ₹\ 1050$$

એક વર્ષના અંતે ટી.વી.ની કિંમત = ₹ 21,000 – ₹ 1050 = ₹ 19,950

બીજી રીત : આ ઉકેલ નીચે મુજબ સીધી રીતે મેળવી શકીએ.

એક વર્ષના અંતે ટી.વી.ની કિંમત = ₹ 21,000 × $\left(1 - \frac{5}{100}\right)$

= ₹ 21,000 × $\frac{19}{20}$ = ₹ 19,950

પ્રયત્ન કરો

1. ₹ 10,500 ની યંત્રસામગ્રીમાં 5% નો ઘટાડો થયો. તો એક વર્ષ પછી તેની કિંમત શોધો.
2. એક શહેરની હાલની જનસંખ્યા 12 લાખ છે, તેમાં પ્રતિ વર્ષ 4% નો વધારો થાય છે. તો બે વર્ષ પછી શહેરની જનસંખ્યા શોધો.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. એક સ્થળની જનસંખ્યા વર્ષ 2003 માં 5% પ્રતિ વર્ષના દરે વધીને 54,000 થાય છે.
   (i) 2001ની જનસંખ્યા શોધો.
   (ii) 2005માં જનસંખ્યા શું હશે ?
2. એક પ્રયોગશાળામાં એક પ્રયોગમાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા પ્રતિ કલાકે 2.5%ના દરે વધતી હતી, જો પહેલાં બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા 5,06,000 હોય તો બે કલાક પછી બૅક્ટેરિયાની સંખ્યા કેટલી હશે ?
3. એક સ્કૂટર ₹ 42,000 માં ખરીદવામાં આવ્યું. તેની કિંમતમાં 8%ના દરે પ્રતિ વર્ષનો ઘટાડો આવ્યો. તો એક વર્ષના અંતે તેની કિંમત શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. વળતર એટલે છાપેલી કિંમતમાં આપેલી છૂટ.
   વળતર = છાપેલી કિંમત – વેચાણ કિંમત
2. જ્યારે ટકાવારી આપી હોય ત્યારે વળતર શોધી શકાય.
   વળતર = છાપેલી કિંમત પર વળતરની ટકાવારી
3. વસ્તુ ખરીદ્યા બાદ જે વધારાનો ખર્ચ થયો હોય તેને મૂળ કિંમત સાથે જોડવામાં આવે છે તેને પડતર કિંમત કહે છે.
   પડતર કિંમત = ખરીદે કિંમત + વધારાનો ખર્ચ
4. જે તે વસ્તુના વેચાણ પર સરકાર દ્વારા વસુલવામાં આવતો કર એટલે વેચાણ કર. (ST)
   વેચાણ કર (ST) = બીલની રકમ પરનો કર (%માં)
5. GST અર્થાત્, વસ્તુ અને સેવા કર. આ કર વસ્તુની કિંમત કે સેવા કે બંને ઉપર વસુલ કરવામાં આવે છે.
6. ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ એવું વ્યાજ છે જેને ગણવા માટે આગળના વર્ષના વ્યાજમુદ્દલને મુદ્દલ તરીકે લેવામાં આવે છે. અર્થાત્ (A = P + I).

GU9IEQ

બૈજિક પદાવલિઓ અને નિત્યસમ

પ્રકરણ

8

8.1 બૈજિક પદાવલિઓના સરવાળા-બાદબાકી

વિ ાથીમિત્રો, આપ` અગાઉનાં ધોર માં બૈજિક પદાવલિઓ (ge rai pressions)નો પરિચય મેળ યો છે. ઉદાહર તરીકે, x 3 $2y$ 5 $3x^2$ xy વગેરે.

આપણે અગાઉના ધોરણમાં બૈજિક પદાવલિઓના સરવાળા અને બાદબાકી શીખી ગયા છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, $7x^2 - 4x + 5$ અને $9x - 10$નો સરવાળો કરવા,

$$\begin{array}{rrr} 7x^2 & -\ 4x & +\ 5 \\ + & 9x & -\ 10 \\ \hline 7x^2 & +\ 5x & -\ 5 \end{array}$$

ઉપરોક્ત ગણતરીમાં આપણે કેવી રીતે સરવાળો કર્યો તેનું અવલોકન કરો. આપણે દરેક પદાવલિને હાર (Row) સ્વરૂપે અલગ લખીએ છીએ. આવું કરતી વખતે સજાતીય પદોને એકની નીચે એક એમ ગોઠવી સરવાળો કરીએ છીએ. આ માટે, $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$ તે જ રીતે, $-4x + 9x = (-4 + 9)x = 5x$. ચાલો, થોડા વધુ દૃષ્ટાંત જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9zx - 4y$ અને $-3xz + 5x - 2xy$ નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ઉપરોક્ત ત્રણે પદાવલિઓના દરેક પદને એવી રીતે અલગ હારમાં ગોઠવીશું કે જેથી દરેક સજાતીય પદો એકબીજાની ઉપર-નીચે રહે.

$$\begin{array}{lrrrrr} & 7xy & +\ 5yz & -\ 3zx & & \\ + & & 4yz & +\ 9zx & & -\ 4y \\ + & -2xy & & -\ 3zx & +\ 5x & \\ \hline & 5xy & +\ 9yz & +\ 3zx & +\ 5x & -\ 4y \end{array}$$

(નોધ xz zx)

આમ, પદાવલિઓનો સરવાળો $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ મળે. અહીં આપણે નોંધ લઈએ કે, બીજી પદાવલિમાં $-4y$ અને ત્રીજી પદાવલિમાં $5x$ અલગ દર્શાવ્યા છે (શા માટે ?) કારણ કે આ બંને પદોના સજાતીય પદો બાકીની પદાવલિઓમાં નથી.

ઉદાહરણ 2 : $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ માંથી $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ બાદ કરો.

ઉકેલ :

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & -\ 4xy & +\ 8y^2 & +\ 5x & -\ 3y & \\ 5x^2 & & -\ 4y^2 & & +\ 6y & -\ 3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & -\ 4xy & +\ 12y^2 & +\ 5x & -\ 9y & +\ 3 \end{array}$$

અહીં આપણે નોંધીએ કે કોઈપણ સંખ્યાની બાદબાકી કરવી એટલે તે સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા ઉમેરવી. અહીં (-3) બાદ કરવા એટલે $+3$ ઉમેરવા. $6y$ બાદ કરવા એટલે $(-6y)$ ઉમેરવા. આ જ રીતે $(-4y^2)$ બાદ કરવા એટલે $4y^2$ ઉમેરવા બરાબર થાય. ત્રીજી હરોળમાં દર્શાવેલ નિશાનીઓ $(+, -)$ થી બીજી હરોળમાં રહેલા પદો સાથે કઈ ગાણિતિક ક્રિયા કરવી તે સ્પષ્ટ થાય છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

1. નીચેની બહુપદીઓના સરવાળા કરો :

(i) $ab - bc,\ bc - ca,\ ca - ab$

(ii) $a - b + ab,\ b - c + bc,\ c - a + ac$

(iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4,\ 5 + 7pq - 3p^2q^2$

(iv) $l^2 + m^2,\ m^2 + n^2,\ n^2 + l^2,\ 2lm + 2mn + 2nl$

2. (a) $12a - 9ab + 5b - 3$માંથી $4a - 7ab + 3b + 12$ બાદ કરો.

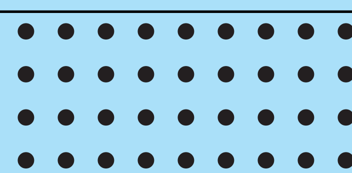
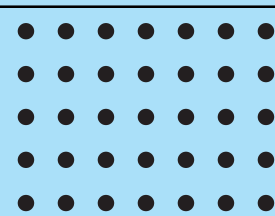
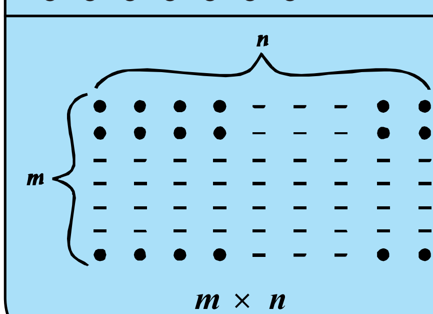
(b) $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$માંથી $3xy + 5yz - 7zx$ બાદ કરો.

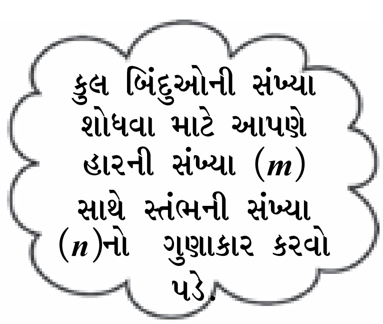
(c) $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$માંથી

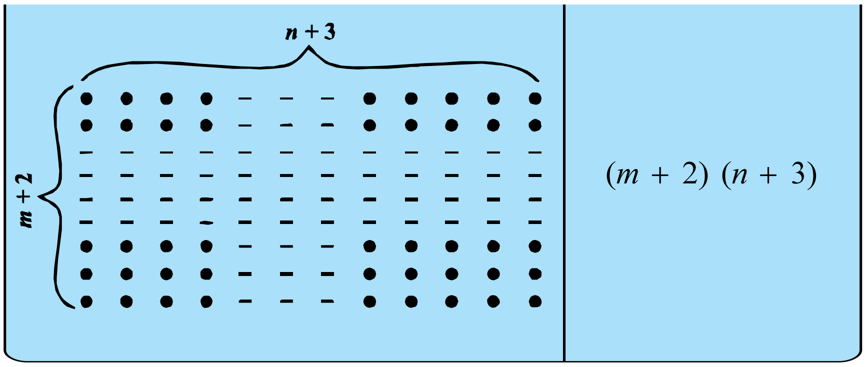
$4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ બાદ કરો.

8.2 બૈજિક પદાવલિઓના ગુણાકાર : પ્રસ્તાવના

(i) નીચે આપેલી બિંદુઓની ભાત જુઓ.

બિંદુઓની ભાત	કુલ બિંદુઓની સંખ્યા
	4×9
	5×7
	$m \times n$

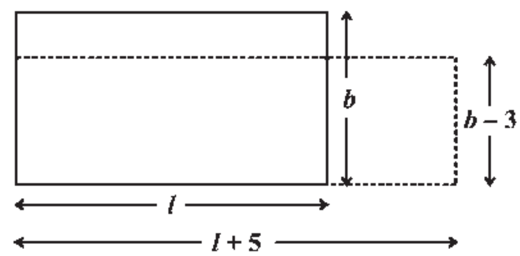




અહીં હારની સંખ્યામાં 2નો વધારો થાય છે. અર્થાત્ $(m + 2)$ અને સ્તંભની સંખ્યા 3 જેટલી વધે છે. અર્થાત્ $(n + 3)$ થશે.

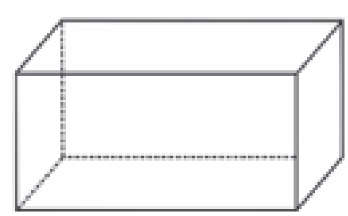
(ii) શું તમે અન્ય કોઈ એવી પરિસ્થિતિ વિચારી શકો જેમાં બે બૈજિક પદોનો ગુણાકાર કરવો પડે ?

અમીના : ‘આપણે લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ માટે વિચારી શકીએ.’ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b$, જ્યાં l એ લંબાઈ અને b એ પહોળાઈ છે. જો લંબાઈમાં 5 એકમનો વધારો કરીએ અર્થાત્ $(l + 5)$ લઈએ અને પહોળાઈમાં 3 એકમનો ઘટાડો કરીએ અર્થાત્ $(b - 3)$ લઈએ તો નવા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $(l + 5) \times (b - 3)$ (એકમ)^2 થશે.



લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે આપણે બૈજિક પદોનો ગુણાકાર કરવો પડે જેવા કે $l \times b$ અથવા $(l + 5) \times (b - 3)$

(iii) શું તમે ઘનફળ વિશે વિચારી શકો ? (લંબઘનનું ઘનફળ એ તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈનો ગુણાકાર છે.)



(iv) સરિતા એક ઉદાહરણ આપી સમજાવે છે કે, જ્યારે આપણે વસ્તુ ખરીદીએ છીએ ત્યારે કુલ ચૂકવવાની રકમ શોધવા ગુણાકાર કરવો પડે છે.

ઉદાહરણ : એક ડઝન કેળાંની કિંમત = ₹ p

અને શાળા પ્રવાસ માટે જરૂરી કેળાં = z ડઝન

તો કુલ ચૂકવવાની રકમ = ₹ $p \times z$

ધારો કે, કેળાંની કિંમતમાં ડઝન દીઠ ₹ 2નો ઘટાડો થાય છે અને જરૂરી કેળાંના જથ્થામાં 4 ડઝનનો ઘટાડો થાય છે.

તો, 1 ડઝન કેળાંની કિંમત = ₹ $(p - 2)$

અને કેળાંનો જરૂરી જથ્થો = $(z - 4)$ ડઝન થશે.

$\therefore$ કુલ ચૂકવવાની રકમ = ₹ $(p - 2) \times (z - 4)$

પ્રયત્ન કરો

વિદ્યાર્થીમિત્રો, શું તમે આવી કોઈ અન્ય પરિસ્થિતિઓ વિશે વિચારી બે ઉદાહરણ આપી શકો જેમાં આપણે બૈજિક પદાવલિઓનો ગુણાકાર કરવો પડે ?

[સૂચન : ● સમય અને ઝડપ માટે વિચારો.
● સાદું વ્યાજ શોધવા માટે મુદ્દલ અને વ્યાજના દર વગેરે માટે વિચારો.]

ઉપરનાં તમામ ઉદાહરણો માટે બે કે તેથી વધુ બૈજિક પદોનો ગુણાકાર કરવો પડે. જો કોઈ વિગત બૈજિક પદાવલિ સ્વરૂપે આપેલ હોય તો આપણે તે શોધવા ગુણાકાર કરવો પડે. મતલબ કે આપણે ગુણાકાર શા માટે કરવો ? કેમ કરવો ? તે જાણીએ છીએ. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિસર કરીએ. શરૂઆતમાં આપણે બે એકપદીના ગુણાકાર કેવી રીતે કરવા તે જોઈશું.

8.3 એકપદીનો એકપદી સાથે ગુણાકાર

પદાવલિને માત્ર એક જ પદ હોય તેવી પદાવલિને એકપદી કહે છે.

8.3.1 બે એકપદીનો ગુણાકાર

અહીં, નોંધીએ કે બધા જ ગુણાકારના જવાબ : $3xy$, $15xy$ અને $(-15xy)$ પણ એકપદી જ છે.

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$

તે જ રીતે, $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

હવે, નીચેના ગુણાકાર જુઓ :

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 3 \times 5 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$
$= (-3) \times (5) \times x \times y$
$= (-15xy)$

થોડાં વધારે ઉપયોગી ઉદાહરણ નીચે મુજબ છે :

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \ (x \times x^2)$
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$
$= -20 \times (x \times x \times yz)$
$= -20x^2yz$

અહીં, $5 \times 4 = 20$ અર્થાત્, પદાવલિના ગુણાકારનો સહગુણક = પ્રથમ એકપદીનો સહગુણક $\times$ બીજી એકપદીનો સહગુણક અને, $x \times x^2 = x^3$ અર્થાત્, પદાવલિના ગુણાકારનો બૈજિક અવયવ = પ્રથમ એકપદીનો બૈજિક અવયવ $\times$ બીજી એકપદીનો બૈજિક અવયવ

અહીં, આપણે એ અવલોકન કરવું જોઈએ કે બે પદાવલિના ગુણાકારમાં જે બૈજિક ભાગ છે તેમાં અલગ-અલગ ચલના ઘાતાંક કેવી રીતે મેળવાય છે.

આવું કરવા માટે ઘાત અને ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

8.3.2 ત્રણ કે તેથી વધુ એકપદીના ગુણાકાર

નીચેનાં ઉદાહરણો જુઓ :

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z$
$= 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3$
$= 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$
$= 120 \ (x^3 \times x^3)(y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

અહીં એ સ્પષ્ટ છે કે, ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા આપેલ એકપદીઓ પૈકી પ્રથમ અને દ્વિતીય એકપદીનો ગુણાકાર કરીએ છીએ અને ત્યાર બાદ જે જવાબ મળે તેને ત્રીજી એકપદી સાથે ગુણીએ છીએ. આ જ પદ્ધતિથી ગમે તેટલી એકપદીઓનો ગુણાકાર પણ મેળવી શકાય.

પ્રયત્ન કરો

- $4x \times 5y \times 7z$ શોધો.
- $(4x \times 5y)$ શોધી તેને $7z$થી ગુણો.
  અથવા $(5y \times 7z)$ શોધી તેને $4x$ વડે ગુણો.
  શું ઉપરોક્ત બંને પરિણામ સરખાં છે ?
  તેના પરથી તમે શું તારણ આપશો ?

આપણે નીચેની રીતે પણ ગુણાકાર શોધી શકીએ :
$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3$
$= (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120x^6y^6$

ઉદાહરણ 3 : નીચેના કોષ્ટકમાં લંબચોરસ માટે આપેલી લંબાઈ અને પહોળાઈનાં માપ પરથી લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ :

લંબાઈ	પહોળાઈ	ક્ષેત્રફળ
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

ઉદાહરણ 4 : નીચેના કોષ્ટકમાં લંબઘન માટે આપેલી લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈના માપ પરથી લંબઘનનું ઘનફળ શોધો.

	લંબાઈ	પહોળાઈ	ઊંચાઈ	ઘનફળ
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$	....
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m	....
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$	....

ઉકેલ : ઘનફળ = લંબાઈ $\times$ પહોળાઈ $\times$ ઊંચાઈ

તેથી,

(1) ઘનફળ $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$
$= (2 \times 3 \times 5)\ (ax)(by)(cz)$
$= 30\ abcxyz$

(2) ઘનફળ $= (m^2n)(n^2p)(p^2m)$
$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2)$
$= m^3n^3p^3$

(3) ઘનફળ $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$
$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3$
$= 64q^6$

સ્વાધ્યાય 8.2

1. નીચે આપેલી એકપદીઓની જોડનો ગુણાકાર શોધો.
(i) $4,\ 7p$ (ii) $-4p,\ 7p$ (iii) $-4p,\ 7pq$ (iv) $4p^3,\ -3p$
(v) $4p,\ 0$

2. લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈનાં માપ માટે નીચે આપેલી એકપદીની જોડનો ઉપયોગ કરીને લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
$(p,\ q)$; $(10m,\ 5n)$; $(20x^2,\ 5y^2)$; $(4x,\ 3x^2)$; $(3mn,\ 4np)$

3. ગુણાકાર કરી કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

પ્રથમ એકપદી→ બીજી એકપદી↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	.....	.....	.....	.....	.....
$-5y$	.....	.....	$-15x^2y$	.....	.....	.....
$3x^2$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$-4xy$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$7x^2y$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$-9x^2y^2$	.....	.....	.....	.....	.....	.....

4. લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈના માપ અનુક્રમે નીચે મુજબ છે, તેના પરથી ઘનફળ શોધો.

(i) $5a,\ 3a^2,\ 7a^4$ (ii) $2p,\ 4q,\ 8r$ (iii) $xy,\ 2x^2y,\ 2xy^2$ (iv) $a,\ 2b,\ 3c$

5. ગુણાકાર શોધો.

(i) $xy,\ yz,\ zx$ (ii) $a,\ -a^2,\ a^3$ (iii) $2,\ 4y,\ 8y^2,\ 16y^3$

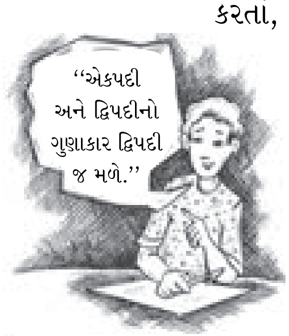
(iv) $a,\ 2b,\ 3c,\ 6abc$ (v) $m,\ -mn,\ mnp$

8.4 એકપદીનો બહુપદી સાથે ગુણાકાર

જે પદાવલિમાં બે પદ હોય તેવી પદાવલિને ι **binomia** કહે છે. ત્ર પદ ધરાવતી પદાવલિને ι ι **trinomia** કહે છે અને આ પ્રમા` આગળ યાપક સ્વરૂપે `ઈએ તો, એક કે તેથી વધુ પદો કે જેના સહગુ કો શૂન્ય ન હોય (અને ચલના ιતાંક અન પૂ ιક હોય) તેને ι ι કહેવાય.

8.4.1 એકપદીનો દ્વિપદી સાથે ગુણાકાર

મિત્રો, અહીં આપણે એકપદી $3x$ને દ્વિપદી $5y + 2$ સાથે ગુણીએ. અર્થાત્, $3x \times (5y + 2) = ?$ અહીં, યાદ રાખીએ કે $3x$ અને $(5y + 2)$ એ સંખ્યા દર્શાવે છે. આથી વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં, $3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$



સામાન્ય રીતે આપણે ગણતરી દરમિયાન વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ જ છીએ. ઉદાહરણ

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= (7 \times 100) + (7 \times 6)$ (વિભાજનનાં નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)

$= 700 + 42 = 742$

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= (7 \times 40) - (7 \times 2)$ (વિભાજનનાં નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)

$= 280 - 14 = 266$

આ જ રીતે, $-3x \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

અને, $5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy$

મિત્રો, દ્વિપદી × એકપદી માટે શું કહી શકાય ? ઉદાહરણ તરીકે, $(5y + 2) \times 3x = ?$

અહીં, ક્રમના નિયમનો ઉપયોગ કરી શકાય : $7 \times 3 = 3 \times 7$ અથવા વ્યાપક સ્વરૂપે : $a \times b = b \times a$ આ જ રીતે, $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$

પ્રયત્ન કરો

ગુણાકાર શોધો : (i) $2x(3x + 5xy)$ (ii) $a^2(2ab - 5c)$

8.4.2 એકપદીનો ત્રિપદી સાથે ગુણાકાર

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ વિચારો. અગાઉના કિસ્સા મુજબ, આપણે વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ.

$$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$$
$$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$$

ત્રિપદી (Trinomial)ના દરેક પદને એકપદી (Monomial) વડે ગુણો અને પછી સરવાળો કરો.

અહીં અવલોકન કરો કે વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીને આપણે તબક્કાવાર પદોનો ગુણાકાર મેળવી શકીએ છીએ.

પ્રયત્ન કરો

ગુણાકાર શોધો :
$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$

ઉદાહરણ 5 : આપેલ પદાવલિનું સરળ સ્વરૂપ આપો અને નિર્દેશ અનુસાર કિંમત મેળવો.

(i) $x(x - 3) + 2$, $x = 1$ માટે (ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63$, $y = (-2)$ માટે

ઉકેલ :

(i) $x(x - 3) + 2 = x^2 - 3x + 2$

$x = 1$ માટે, $x^2 - 3x + 2 = (1)^2 - 3(1) + 2$
$= 1 - 3 + 2$
$= 3 - 3 = 0$

(ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63 = 6y^2 - 21y - 3y + 12 - 63$
$= 6y^2 - 24y - 51$

$y = (-2)$ માટે, $= 6y^2 - 24y - 51$
$= 6(-2)^2 - 24(-2) - 51$
$= 6 \times 4 + 24 \times 2 - 51$
$= 24 + 48 - 51 = 72 - 51 = 21$

ઉદાહરણ 6 : સરવાળો કરો :

(i) $5m(3 - m)$ અને $6m^2 - 13m$ (ii) $4y(3y^2 + 5y - 7)$ અને $2(y^3 - 4y^2 + 5)$

ઉકેલ :

(i) પ્રથમ પદાવલિ $= 5m(3 - m) = (5m \times 3) - (5m \times m) = 15m - 5m^2$

હવે, બીજી પદાવલિ ઉમેરતાં, $15m - 5m^2 + 6m^2 - 13m = m^2 + 2m$

(ii) પ્રથમ પદાવલિ $= 4y(3y^2 + 5y - 7)$
$= (4y \times 3y^2) + (4y \times 5y) + (4y \times (-7))$
$= 12y^3 + 20y^2 - 28y$

બીજી પદાવલિ $= 2(y^3 - 4y^2 + 5)$
$= 2y^3 + 2(-4y^2) + 2 \times 5$
$= 2y^3 - 8y^2 + 10$

હવે, બંને પદાવલિનો સરવાળો કરતાં,

$$\begin{array}{rrrr} 12y^3 & + 20y^2 & - 28y & \\ + 2y^3 & - 8y^2 & & + 10 \\ \hline 14y^3 & + 12y^2 & - 28y & + 10 \end{array}$$

ઉદાહરણ 7 : $2pq(p + q)$માંથી $3pq(p - q)$ બાદ કરો.

ઉકેલ : અહીં, $3pq(p - q) = 3p^2q - 3pq^2$ અને $2pq(p + q) = 2p^2q + 2pq^2$

બાદબાકી કરતાં,

$$\begin{array}{rr} 2p^2q & + 2pq^2 \\ 3p^2q & - 3pq^2 \\ - & + \\ \hline -p^2q & + 5pq^2 \end{array}$$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. નીચેની પદાવલિઓની દરેક જોડ માટે ગુણાકાર મેળવો.

   (i) $4p$, $q + r$ (ii) ab, $a - b$ (iii) $a + b$, $7a^2b^2$ (iv) $a^2 - 9$, $4a$

   (v) $pq + qr + rp$, 0

2. કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

ક્રમ	પ્રથમ પદાવલિ	બીજી પદાવલિ	ગુણાકાર
(i)	a	$b + c + d$	...
(ii)	$x + y - 5$	$5xy$	...
(iii)	p	$6p^2 - 7p + 5$	...
(iv)	$4p^2q^2$	$p^2 - q^2$	...
(v)	$a + b + c$	abc	...

3. ગુણાકાર શોધો.

   (i) $(a^2) \times (2a^{22}) \times (4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right) \times \left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

   (iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right) \times \left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x \times x^2 \times x^3 \times x^4$

4. (a) $3x(4x - 5) + 3$નું સાદું રૂપ આપો અને (i) $x = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}$ માટે તેની કિંમત શોધો.

   (b) $a(a^2 + a + 1) + 5$નું સાદું રૂપ આપો અને (i) $a = 0$ (ii) $a = 1$ (iii) $a = (-1)$ માટે તેની કિંમત શોધો.

5. (a) સરવાળો કરો : $p(p - q)$, $q(q - r)$ અને $r(r - p)$

   (b) સરવાળો કરો : $2x(z - x - y)$ અને $2y(z - y - x)$

   (c) બાદબાકી કરો : $4l(10n - 3m + 2l)$માંથી $3l(l - 4m + 5n)$

   (d) બાદબાકી કરો : $4c(-a + b + c)$માંથી $3a(a + b + c) - 2b(a - b + c)$

8.5 બહુપદીનો બહુપદી સાથે ગુણાકાર

8.5.1 દ્વિપદીનો દ્વિપદી સાથે ગુણાકાર

અહીં આપણે, દ્વિપદી $(2a + 3b)$નો બીજી કોઈ દ્વિપદી $(3a + 4b)$ સાથે ગુણાકાર કરીએ. અગાઉના કિસ્સામાં જેમ ગણતરી કરી છે તે જ રીતે અહીં તબક્કાવાર ગણતરી કરીશું. ગુણાકાર માટે વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ તો,

$$(3a + 4b) \times (2a + 3b) = 3a \times (2a + 3b) + 4b(2a + 3b)$$

જુઓ કે, પ્રથમ દ્વિપદીના દરેક પદનો બીજી દ્વિપદીના દરેક પદ સાથે ગુણાકાર થાય છે.

$$= (3a \times 2a) + (3a \times 3b) + (4b \times 2a) + (4b \times 3b)$$

$$= 6a^2 + 9ab + 8ba + 12b^2$$

$$= 6a^2 + 17ab + 12b^2 \qquad (\because\ ba = ab)$$

જ્યારે આપણે દરેક પદનો ગુણાકાર લઈએ છીએ, ત્યારે આપણે સ્વીકારીએ છીએ કે અહીં, $2 \times 2 = 4$ પદો છે. પરંતુ, તે પૈકીના બે પદ સજાતીય પદો છે. જે પરસ્પર જોડાય છે અને તેથી છેલ્લે ત્રણ પદ મળે છે. આમ, જ્યારે બહુપદી સાથે બહુપદીનો ગુણાકાર કરીએ ત્યારે આપણે હંમેશાં સજાતીય પદો શોધવાં જોઈએ અને જો હોય, તો તેઓને પરસ્પર જોડવા જોઈએ (સરવાળા દ્વારા કે બાદબાકી દ્વારા).

ઉદાહરણ 8 : ગુણાકાર કરો.

(i) $(x - 4)$ અને $(2x + 3)$ (ii) $(x - y)$ અને $(3x + 5y)$

ઉકેલ :

(i) $(x - 4) \times (2x + 3) = x \times (2x + 3) - 4 \times (2x + 3)$

$= (x \times 2x) + (x \times 3) - (4 \times 2x) - (4 \times 3)$

$= 2x^2 + 3x - 8x - 12$

$= 2x^2 - 5x - 12$ [સજાતીય પદોનું સાદું રૂપ આપતાં]

(ii) $(x - y) \times (3x + 5y) = x \times (3x + 5y) - y \times (3x + 5y)$

$= (x \times 3x) + (x \times 5y) - (y \times 3x) - (y \times 5y)$

$= 3x^2 + 5xy - 3yx - 5y^2$

$= 3x^2 + 2xy - 5y^2$ [સજાતીય પદોનું સાદું રૂપ આપતાં]

ઉદાહરણ 9 : ગુણાકાર કરો.

(i) $(a + 7)$ અને $(b - 5)$ (ii) $(a^2 + 2b^2)$ અને $(5a - 3b)$

ઉકેલ :

(i) $(a + 7) \times (b - 5) = a \times (b - 5) + 7(b - 5)$

$= ab - 5a + 7b - 35$

(અહીં, આ ગુણાકારમાં કોઈ સજાતીય પદો નથી તેની નોંધ લઈએ.)

(ii) $(a^2 + 2b^2) \times (5a - 3b) = a^2 \times (5a - 3b) + 2b^2(5a - 3b)$

$= 5a^3 - 3a^2b + 10ab^2 - 6b^3$

8.5.2 દ્વિપદીનો ત્રિપદી સાથે ગુણાકાર

આ ગુણાકારમાં આપણે ત્રિપદીના દરેક ત્રણ પદોને દ્વિપદીના બંને પદો સાથે ગુણવા જોઈએ. જેથી કુલ $(2 \times 3) = 6$ પદો મળશે. વળી, જો સજાતીય પદો હશે તો 6 પદોને બદલે ઉકેલમાં 5 કે તેથી ઓછા પદો મળશે.

ધારો કે,

$$\therefore \underset{\text{દ્વિપદી}}{(a+7)} \times \underset{\text{ત્રિપદી}}{(a^2+3a+5)} = a \times (a^2+3a+5) + 7 \times (a^2+3a+5) \quad (\because \text{ વિભાજનનો નિયમ})$$

$$= a^3 + 3a^2 + 5a + 7a^2 + 21a + 35$$

$$= a^3 + (3a^2 + 7a^2) + (5a + 21a) + 35$$

$= a^3 + 10a^2 + 26a + 35$ (શા માટે જવાબમાં માત્ર 4 પદો છે ?)

ઉદાહરણ 10 : $(a + b)\ (2a - 3b + c) - (2a - 3b)c$નું સાદું રૂપ આપો.

ઉકેલ : અહીં,

$$(a + b)\ (2a - 3b + c) = a(2a - 3b + c) + b(2a - 3b + c)$$

$$= 2a^2 - 3ab + ac + 2ab - 3b^2 + bc$$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac$$

(અહીં $-3ab$ અને $2ab$ સજાતીય પદો છે.)

અને, $(2a - 3b)c = 2ac - 3bc$

તેથી

$$(a + b)\ (2a - 3b + c) - (2a - 3b)c = 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - (2ac - 3bc)$$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$$

$$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$$

સ્વાધ્યાય 8.4

1. દ્વિપદીનો ગુણાકાર કરો.

(i) $(2x + 5)$ અને $(4x - 3)$ (ii) $(y - 8)$ અને $(3y - 4)$

(iii) $(2.5l - 0.5m)$ અને $(2.5l + 0.5m)$ (iv) $(a + 3b)$ અને $(x + 5)$

(v) $(2pq + 3q^2)$ અને $(3pq - 2q^2)$ (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2 + 3b^2\right)$ અને $4\left(a^2 - \frac{2}{3}b^2\right)$

2. ગુણાકાર શોધો.

(i) $(5 - 2x)\ (3 + x)$ (ii) $(x + 7y)\ (7x - y)$

(iii) $(a^2 + b)\ (a + b^2)$ (iv) $(p^2 - q^2)\ (2p + q)$

3. સાદું રૂપ આપો :

(i) $(x^2 - 5)\ (x + 5) + 25$ (ii) $(a^2 + 5)\ (b^3 + 3) + 5$

(iii) $(t + s^2)\ (t^2 - s)$

(iv) $(a + b)\ (c - d) + (a - b)\ (c + d) + 2(ac + bd)$

(v) $(x + y)\ (2x + y) + (x + 2y)\ (x - y)$

(vi) $(x + y)\ (x^2 - xy + y^2)$

(vii) $(1.5x - 4y)\ (1.5x + 4y + 3) - 4.5x + 12y$

(viii) $(a + b + c)\ (a + b - c)$

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. 'ચલ' અને 'અચલ'ના ઉપયોગથી પદાવલિ રચી શકાય છે.
2. પદોનો સરવાળો કરીને પદાવલિ બનાવી શકાય છે. પદોને અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.
3. જે પદાવલિમાં એક, બે કે ત્રણ પદો હોય તેવી પદાવલિને અનુક્રમે એકપદી, દ્વિપદી કે ત્રિપદી કહેવામાં આવે છે. વ્યાપક સ્વરૂપે, એક કે તેથી વધુ પદો જેના સહગુણકો શૂન્ય ન હોય (અને ચલના ઘાતાંક અનૃણ હોય) તેને બહુપદી કહેવાય.
4. સમાન ચલ ધરાવતાં અને તે ચલોની સમાન ઘાત ધરાવતાં પદોને સજાતીય પદો કહે છે. સજાતીય પદોના સહગુણકો સમાન હોવા જરૂરી નથી.
5. જ્યારે બહુપદીના સરવાળા (કે બાદબાકી) કરવા હોય ત્યારે સૌ પ્રથમ તેના સજાતીય પદોની યોગ્ય ગોઠવણી કરી તેને ઉમેરવા (કે બાદ કરવા) જોઈએ. ત્યારબાદ વિજાતીય પદોની ગોઠવણી કરવી જોઈએ.
6. ઘણી બધી પરિસ્થિતિમાં બૈજિક પદાવલિઓનો ગુણાકાર કરવો જરૂરી બને છે.
   ઉદાહરણ તરીકે, જો લંબચોરસની બાજુઓનાં માપ બૈજિક પદાવલિ તરીકે આપેલાં હોય અને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું હોય.
7. એકપદીનો એકપદી સાથે ગુણાકાર કરવાથી એકપદી જ મળે છે.
8. જ્યારે બહુપદીનો એકપદી સાથે ગુણાકાર કરવાનો હોય ત્યારે આપેલ બહુપદીના દરેક પદ સાથે જે-તે એકપદીનો ગુણાકાર કરવો પડે છે.
9. જ્યારે બહુપદીનો ગુણાકાર દ્વિપદી (કે ત્રિપદી) સાથે કરી ગુણનફળ મેળવવાનું હોય ત્યારે એક પછી એક એમ દરેક પદનો ગુણાકાર કરવો પડે.
   અર્થાત્, આપેલ બહુપદીના દરેક પદનો દ્વિપદીના (કે ત્રિપદીના) દરેક પદ સાથે ગુણાકાર કરવો જોઈએ.

પ્રકરણ 9

માપન

GUSAI1

9.1 પ્રાસ્તાવિક

બંધ સમતલ આકૃતિ માટે આપણે શીખી ગયા, કે તેની ચારે બાજુની હદ કે સીમાનું કુલ અંતર એટલે પરિમિતિ અને તે આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા કુલ પ્રદેશને તેનું ક્ષેત્રફળ કહેવામાં આવે છે. આપણે ત્રિકોણ, લંબચોરસ, વર્તુળ વગેરે જેવી વિભિન્ન સમતલ આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધવાનું શીખી ચૂક્યા છીએ. ઉપરાંત લંબચોરસ આકાર ફરતે આવેલા રસ્તા કે પગદંડીનું ક્ષેત્રફળ શોધતા પણ શીખી ગયા છીએ.

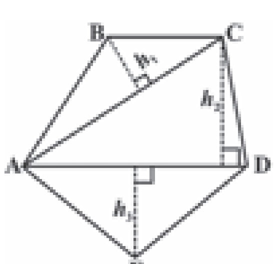
આ પ્રકરણમાં આપણે ચતુષ્કોણ જેવી બંધ સમતલ આકૃતિઓની પરિમિતિ તથા ક્ષેત્રફળ સાથે સંબંધિત સમસ્યા કે પ્રશ્નો ઉકેલવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

આપણે સમઘન, લંબઘન અને નળાકાર જેવા ઘન આકારોના પૃષ્ઠફળ અને કદ અંગે પણ અધ્યયન કરીશું.

9.2 બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ (rea o Po on)

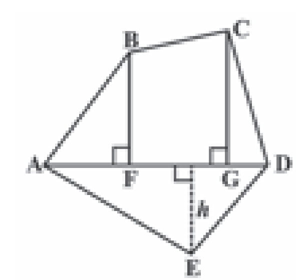
9M673R

આપણે, જેમ ચતુષ્કોણને ત્રિકોણોમાં વહેંચીને તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકીએ છીએ, તે જ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને બહુકોણ (Polygon)નું ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય છે. નીચે આપેલ આકૃતિ 9.1 અને 9.2 માં દર્શાવેલા પંચકોણનાં ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે પ્રયત્ન કરો.



આકૃતિ 9.1

વિકર્ણ AC અને ADની રચના કરીને પંચકોણ ABCDEને ત્રણ ત્રિકોણોમાં વહેંચી શકાય છે. તેથી પંચકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ = ΔABCનું ક્ષેત્રફળ + ΔACDનું ક્ષેત્રફળ + ΔAEDનું ક્ષેત્રફળ થશે.

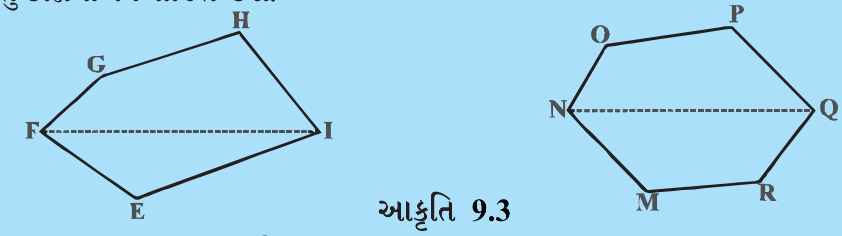


આકૃતિ 9.2

એક વિકર્ણ AD અને તેના પર બે લંબ BF અને CGની રચના કરવાથી પંચકોણ ABCDEને ચાર ભાગોમાં વહેંચી શકાય છે. તેથી, પંચકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ = કાટકોણ ત્રિકોણ AFBનું ક્ષેત્રફળ + સમલંબ BFGCનું ક્ષેત્રફળ + કાટકોણ ત્રિકોણ CGDનું ક્ષેત્રફળ + ΔAEDનું ક્ષેત્રફળ (અહીં સમલંબ ચતુષ્કોણ BFGCની સમાંતર બાજુઓને ઓળખો.)

પ્રયત્ન કરો

(i) નીચેની આકૃતિ 9.3 માં દર્શાવેલા બહુકોણના ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે તેને ત્રિકોણ અને સમલંબ ચતુષ્કોણમાં વિભાજિત કરો.



આકૃતિ 9.3

બહુકોણ EFGHIનો એક વિકર્ણ FI છે. બહુકોણ MNOPQRનો એક વિકર્ણ NQ છે.

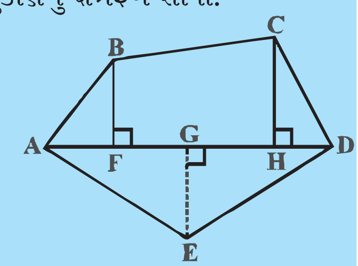
(ii) બહુકોણ ABCDEને આકૃતિ 9.4 માં દર્શાવ્યા મુજબ જુદા-જુદા ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવેલ છે. અહીં AD = 8 સેમી, AH = 6 સેમી, AG = 4 સેમી, AF = 3 સેમી અને લંબ BF = 2 સેમી, CH = 3 સેમી, EG = 2.5 સેમી આપવામાં આવેલ છે તો બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

બહુકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ =

ΔAFBનું ક્ષેત્રફળ + ...

ΔAFBનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times AF \times BF =$

$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ ....



સમલંબ ચતુષ્કોણ FBCHનું ક્ષેત્રફળ $= FH \times \frac{(BF+CH)}{2}$

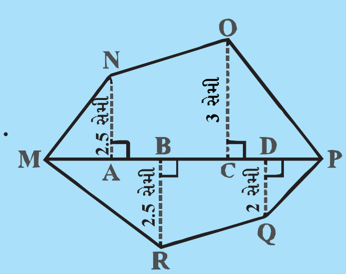
આકૃતિ 9.4

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ (FH = AH − AF)

ΔCHDનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times HD \times CH =$ ....

ΔADEનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times AD \times GE =$ ....

તેથી, બહુકોણ ABCDEનું ક્ષેત્રફળ = ...



(iii) આકૃતિ 9.5 માં દર્શાવેલ બહુકોણ MNOPQRમાં જો MP = 9 સેમી, MD = 7 સેમી, MC = 6 સેમી, MB = 4 સેમી અને MA = 2 સેમી હોય, તો બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. NA, OC, QD અને RB એ વિકર્ણ MPને દોરેલા લંબ છે.

આકૃતિ 9.5

ઉદાહરણ 1 : એક સમલંબ આકારના ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 480 મી^{2} છે. આ ખેતરની સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું લંબઅંતર 15 મીટર છે અને સમાંતર બાજુઓમાંથી એકની લંબાઈ 20 મીટર છે તો બીજી સમાંતર બાજુની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર બાજુઓમાંથી એકની લંબાઈ $a = 20$ મીટર અને બીજી સમાંતર બાજુની લંબાઈ b ધારો અને તેમની વચ્ચેનું લંબ અંતર $h = 15$ મીટર છે.

ઉપરાંત સમલંબ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ = 480 મીટર^2 આપેલ છે.

$$\text{સમલંબનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}h(a+b)$$

$$\therefore 480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b)$$

$$\therefore \frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$$

$$\therefore 64 = 20 + b \quad \therefore b = 44 \text{ મીટર}$$

આથી સમંલબ ચતુષ્કોણની બીજી સમાંતર બાજુ 44 મીટરની હશે.

ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 240 સેમી^{2} છે અને તેના એક વિકર્ણની લંબાઈ 16 સેમી છે તો બીજા વિકર્ણની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે એક વિકર્ણની લંબાઈ d_1 = 16 સેમી છે અને બીજા વિકર્ણની લંબાઈ d_2 છે.

હવે સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

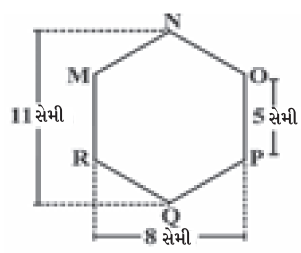
$$\therefore\ 240 = \frac{1}{2} \times 16 \times d_2$$

$$\therefore\ \frac{240 \times 2}{16} = d_2$$

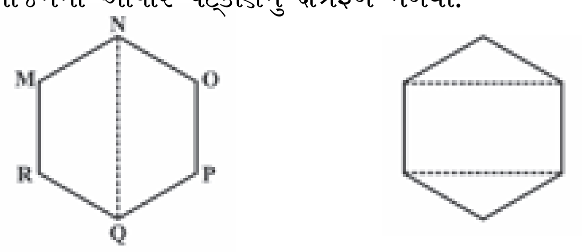
$\therefore\ d_2 = 30$ સેમી

સમબાજુ ચતુષ્કોણના બીજા વિકર્ણની લંબાઈ 30 સેમી છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 9.6 માં એક સમબાજુ ષટ્કોણ MNOPQR દર્શાવેલ છે, તેની દરેક બાજુ 5 સેમી લંબાઈની છે. આકૃતિ 9.7 માં દર્શાવ્યા મુજબ અમન અને રિદ્ધિમા આ ષટ્કોણને જુદી-જુદી રીતે વિભાજિત કરે છે. આ બંને પ્રકારના વિભાજનના આધારે ષટ્કોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.



આકૃતિ 9.6

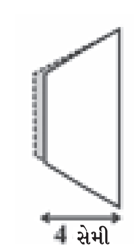


અમનની રીત **રિદ્ધિમાની રીત**

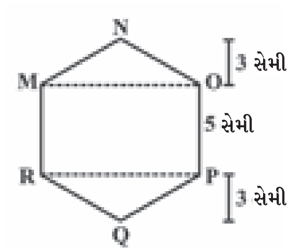
આકૃતિ 9.7

ઉકેલ : અમન દ્વારા કરેલ વિભાજન પ્રમાણે :

આપેલ ષટ્કોણ સમબાજુ હોવાથી NQ વિકર્ણ ષટ્કોણને બે એકરૂપ સમલંબ ચતુષ્કોણમાં વિભાજિત કરે છે. તેને કાગળમાં ષટ્કોણ કાપી પછી NQમાંથી વાળીને તમે ખરાઈ કરી શકો (જુઓ આકૃતિ 9.8). હવે સમલંબ MNQRનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 2 \times 16 = 32$ સેમી^{2}



આકૃતિ 9.8



આકૃતિ 9.9

તેથી, ષટ્કોણ MNOPQRનું ક્ષેત્રફળ $= 2 \times 32 = 64$ સેમી^{2}

રિદ્ધિમાએ કરેલ ષટ્કોણના વિભાજન પ્રમાણે :

આકૃતિ 9.9 માં ΔMNO અને ΔRPQ એકરૂપ ત્રિકોણ છે. તેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલા લંબની લંબાઈ 3 સેમી છે.

આ બન્ને ત્રિકોણોને કાપી એકબીજા પર મૂકીને એકરૂપતાની ચકાસણી કરી શકાય.

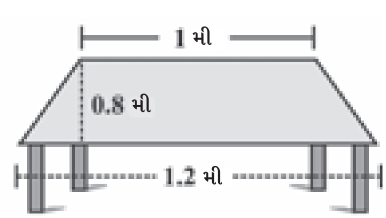
ΔMNOનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ સેમી^{2}

ΔRPQનું ક્ષેત્રફળ = 12 સેમી^{2} ($\because$ ΔMNO અને ΔRPQ એકરૂપ ત્રિકોણો છે.)

લંબચોરસ MOPRનું ક્ષેત્રફળ $= 8 \times 5 = 40$ સેમી^{2}

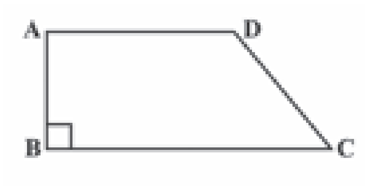
હવે ષટ્કોણ MNOPQRનું ક્ષેત્રફળ $= 40 + 12 + 12 = 64$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 9.1



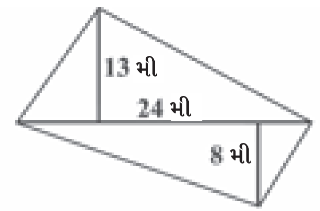
1. એક ટેબલની ઉપર સમતલ પાટિયું સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારનું છે. જો તેની સમાંતર બાજુઓની લંબાઈ 1 મીટર અને 1.2 મીટર હોય અને સમાંતર બાજુઓની વચ્ચેનું લંબઅંતર 0.8મી હોય, તો ટેબલના આ પાટીયાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. એક સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 34 સેમી^{2} છે અને તેની ઊંચાઈ 4 સેમી છે. આ સમલંબની સમાંતરબાજુઓમાંથી એક બાજુની લંબાઈ 10 સેમી છે, તો તેની બીજી સમાંતર બાજુની લંબાઈ શોધો.



3. એક સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારના ખેતર ABCDની વાડની લંબાઈ 120 મીટર છે. જો BC = 48 મીટર, CD = 17 મીટર અને AD = 40 મીટર હોય, તો આ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો. અહીં બાજુ AB એ સમાંતર બાજુ AD અને BC પર લંબ છે.

4. એક ચતુષ્કોણ આકારના ખેતરના વિકર્ણની લંબાઈ 24 મીટર છે અને બાકીનાં બે શિરોબિંદુમાંથી આ વિકર્ણ પર દોરેલા લંબ 8 મીટર અને 13 મીટર છે તો ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

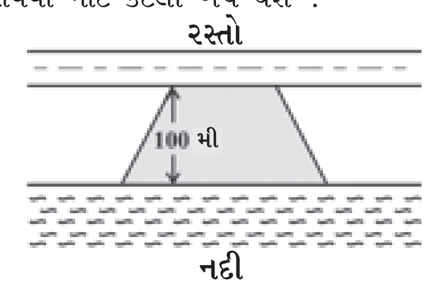


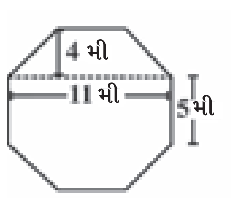
5. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોની લંબાઈ 7.5 સેમી અને 12 સેમી છે તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુ 5 સેમી અને વેધ 4.8 સેમી છે, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. જો એક વિકર્ણની લંબાઈ 8 સેમી હોય તો બીજા વિકર્ણની લંબાઈ મેળવો.

7. કોઈ મકાનના ભોંયતળિયામાં સમબાજુ ચતુષ્કોણ આકારની 3000 લાદીઓ લગાડેલ છે. આ લાદીના વિકર્ણની લંબાઈ 45 સેમી અને 30 સેમી છે. હવે એક ચોરસ મીટર લાદી ઘસવાનો ખર્ચ જો 4 રૂપિયા હોય તો સમગ્ર ભોંયતળિયાની લાદી ઘસાવવા માટે કેટલો ખર્ચ થશે ?

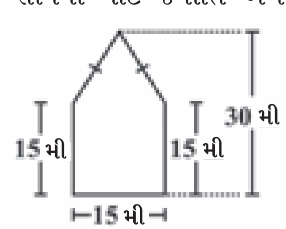
8. મોહન એક સમલંબ ચતુષ્કોણ આકારનું ખેતર ખરીદવા ઇચ્છે છે. આ ખેતરની નદી તરફની બાજુ, એ રસ્તા તરફની બાજુને સમાંતર અને અંતરમાં બમણી છે. જો આ ખેતરનું ક્ષેત્રફળ 10,500 મી^{2} હોય અને ખેતરની સમાંતર બાજુઓ વચ્ચેનું લંબ અંતર 100 મીટર હોય તો ખેતરની નદી તરફની બાજુની લંબાઈ શોધો.

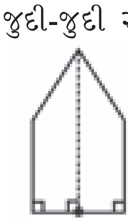




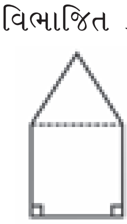
9. જમીન પર એક ઓટલો છે. તેની ઉપરનું સમતલ સમબાજુ અષ્ટકોણ આકારનું છે. જે આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. આ અષ્ટકોણીય સમતલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. એક પંચકોણ આકારનો બગીચો છે જે આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. આ પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે જ્યોતિ અને કવિતાએ જુદી-જુદી રીતે પંચકોણને વિભાજિત કરેલ છે.



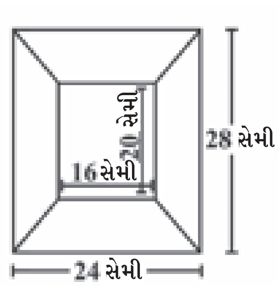


જ્યોતિએ કરેલ વિભાજન



કવિતાએ કરેલ વિભાજન

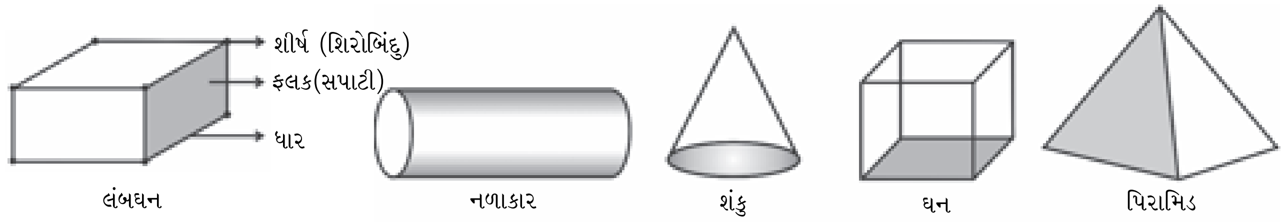
બન્ને રીતે કરેલા વિભાજનની મદદથી બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. શું તમે આ પંચકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની અન્ય કોઈ રીત બતાવી શકો છો ?



11. આકૃતિમાં બતાવેલ ફોટો ફ્રેમની બહારની ધારનું માપ 24 સેમી × 28 સેમી છે અને અંદરની ધારનું માપ અનુક્રમે 16 સેમી × 20 સેમી છે. હવે જો ફ્રેમના ચારે ટુકડાની જાડાઈ સમાન હોય તો ફ્રેમના પ્રત્યેક ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9.3 ઘન આકાર (o id ha es)

આગળના ધોરણમાં આપણે શીખી ચૂક્યા છીએ કે દ્વિ-પરિમાણીય આકૃતિઓને, ત્રિ-પરિમાણીય આકારના ફલક સ્વરૂપે ઓળખી શકાય છે. અત્યાર સુધીમાં મુખ્યત્વે આપણે જે ઘન આકાર (Solid Shape)નો અભ્યાસ કર્યો તે આકૃતિ 9.10 માં દર્શાવેલ છે તે જુઓ.

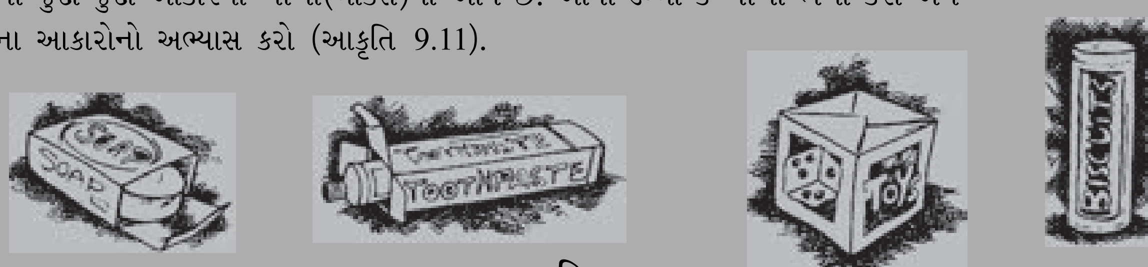


આકૃતિ 9.10

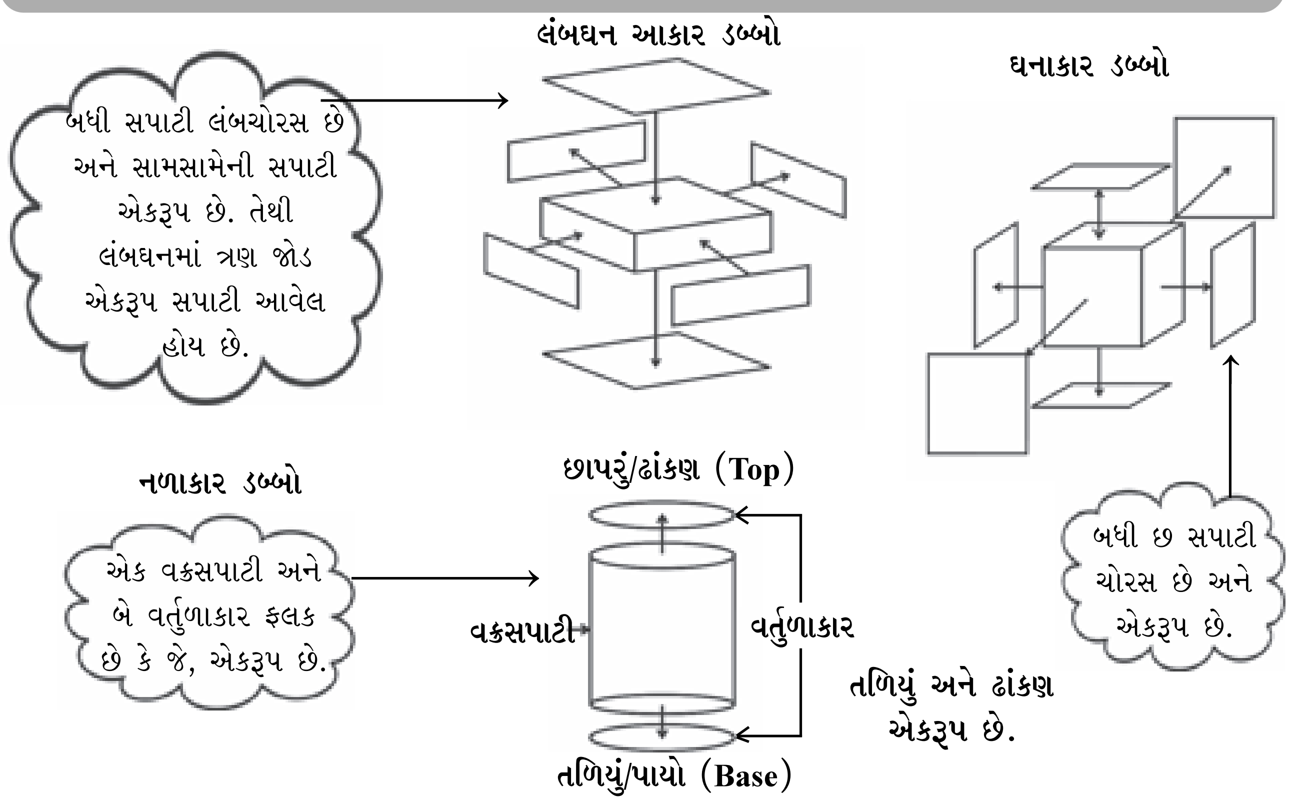
આકૃતિ 9.10 માં દર્શાવેલા કેટલાક આકારોમાં બે કે બેથી વધારે એકરૂપ સપાટી આવેલી છે. તેનું નામકરણ કરો. કયા ઘનમાં બધી સપાટી એકરૂપ છે ? તે જણાવો.

આટલું કરો

આકૃતિ 9.11 માં દર્શાવ્યા મુજબ સાબુ, રમકડાં, દંતમંજન, બિસ્કિટ વગેરે ઘનાકાર, નળાકાર જેવા જુદા-જુદા આકારના ખોખા(બૉક્સ)માં આવે છે. આવા ડબ્બા કે ખોખાં ભેગાં કરો અને તેના આકારોનો અભ્યાસ કરો (આકૃતિ 9.11).

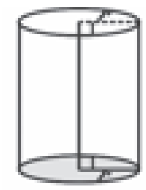


આકૃતિ 9.11



હવે એક પછી એક જુદા-જુદા આકારના ડબ્બા/ખોખા લો. તેની દરેક સપાટીને કાપીને અલગ કરો. દરેક સપાટીના આકારનું અવલોકન કરો. સપાટીને એકબીજા ઉપર રાખીને ખાતરી કરો કે તેઓ સમાન છે કે કેમ ? કુલ સપાટી અને સમાન સપાટીની સંખ્યા શોધો અને તમારાં તારણો લખો.

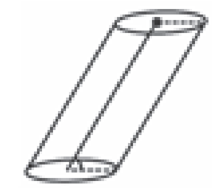
શું તમે નીચેની બાબતો પર ધ્યાન આપ્યું ?



આકૃતિ 9.12
(લંબવૃત્તીય નળાકાર)

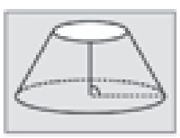
નળાકારની બંને સમાન (એકરૂપ) વર્તુળાકાર સપાટી એકબીજાને સમાંતર છે (આકૃતિ 9.12 જુઓ).

હવે આ વર્તુળાકાર સપાટી પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો, વર્તુળાકાર સપાટીના મધ્યકેન્દ્રને જોડતો રેખાખંડ આધારને લંબ છે. આવા નળાકારને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહે છે. આપણે માત્ર આ પ્રકારના જ નળાકારનો અભ્યાસ કરીશું. અલબત્ત, આકૃતિ 9.13 માં દર્શાવ્યા મુજબના બીજા પ્રકારના નળાકાર પણ હોય છે, જે લંબવૃત્તીય નળાકાર નથી.



આકૃતિ 9.13
(આ એક લંબવૃત્તીય નળાકાર નથી.)

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

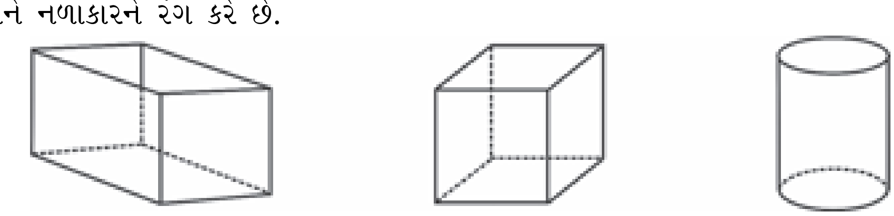


અહીં આપેલી આકૃતિમાં આપેલા ઘનાકારને નળાકાર કહેવો એ કંઈ ખોટું છે ?

974JY5

9.4 ઘન, લંબઘન અને નળાકારના પૃષ્ઠફળ (પૃષ્ઠીય ક્ષેત્રફળ ur ace rea)

ઈમરાન, મોનિકા અને જસપાલ ક્રમશઃ આકૃતિ 9.14 માં દર્શાવેલા સમાન ઊંચાઈના લંબઘન, સમઘન અને નળાકારને રંગ કરે છે.



આકૃતિ 9.14

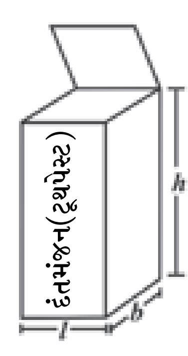
હવે તેઓ એ જાણવા પ્રયત્ન કરે છે કે કોણે વધુ રંગ કર્યો ? હરિ તેમને સલાહ આપે છે કે પ્રત્યેક ડબ્બાનું પૃષ્ઠફળ શોધવાથી તેઓ નક્કી કરી શકશે કે કોણે વધુ રંગ કર્યો છે.

કુલ પૃષ્ઠફળ મેળવવા માટે ઘનાકારની દરેક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ મેળવો અને તેનો સરવાળો કરો. આમ, કોઈ પણ ઘન આકારનું પૃષ્ઠફળ તેની સપાટીના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે. આ બાબતને વધુ સ્પષ્ટ કરવા આપણે એક પછી એક દરેક આકાર વિશે સમજીએ.

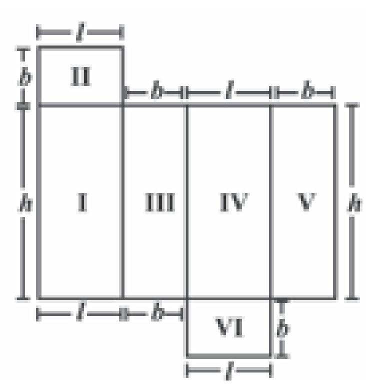
9.4.1 લંબઘન (Cuboid)

ધારો કે આકૃતિ 9 15 માં દર્શાવ્યા મુજબનું દંતમંજન(ટૂથપેસ્ટ)નું ખોખું તમારી પાસે છે. હવે આ ખોખા(બૉક્સ)ને આકૃતિ 9.16 માં દર્શાવ્યા મુજબ કાપી અને ખોલી નાખતા દરેક ફલક એક બીજા સાથે જોડાયેલા પ્રાપ્ત થશે.

હવે અહીં દરેક બાજુની લંબાઈ દર્શાવો. આપણે જાણીએ છીએ કે લંબઘન (Cuboid)માં ત્રણ જોડ એકરૂપ લંબચોરસ ફલક પ્રાપ્ત થાય છે. આ પ્રત્યેક ફલકનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા આપણે કયા સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીશું ?



આકૃતિ 9.15



આકૃતિ 9.16

ખોખા(બૉક્સ)ના દરેક ફલકનું ક્ષેત્રફળ મેળવી કુલ ક્ષેત્રફળ મેળવો. આપણે જાણીએ છીએ કે, લંબઘનનું કુલ ક્ષેત્રફળ = ક્ષેત્રફળ I + ક્ષેત્રફળ II + ક્ષેત્રફળ III + ક્ષેત્રફળ IV + ક્ષેત્રફળ V + ક્ષેત્રફળ VI

$= (h \times l) + (b \times l) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h) + (l \times b)$

તેથી કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2[(h \times l) + (b \times h) + (b \times l)] = 2(lb + bh + hl)$

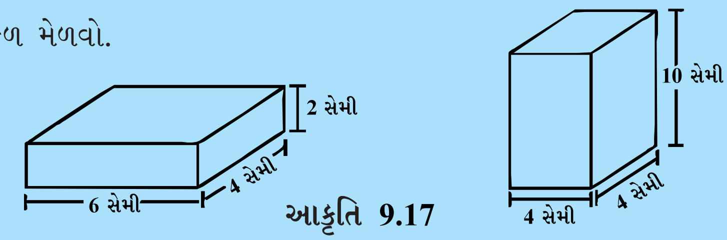
જ્યાં, h, l અને b અનુક્રમે લંબઘનની ઊંચાઈ, લંબાઈ અને પહોળાઈ છે. હવે જો ઉપરોક્ત દર્શાવેલ ખોખાની ઊંચાઈ, લંબાઈ અને પહોળાઈ ક્રમશઃ 20 સેમી, 15 સેમી અને 10 સેમી હોય તો,

કુલ પૃષ્ઠફળ $= 2[(20 \times 15) + (20 \times 10) + (10 \times 15)]$

$= 2(300 + 200 + 150) = 1300$ ચોરસસેમી થાય.

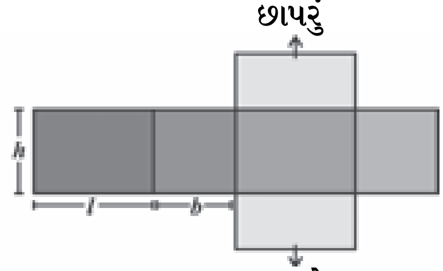
પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 9.17 માં દર્શાવેલ લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ મેળવો.



આકૃતિ 9.17

- લંબઘનના કુલ પૃષ્ઠફળમાંથી તેના તળિયા અને ઉપરની સપાટીને બાદ કરતાં લંબઘનની ચાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ પ્રાપ્ત થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે જે લંબઘન આકારના ઓરડામાં બેઠા છો, તેની ચારે દીવાલનું કુલ ક્ષેત્રફળ, ઓરડાનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (ખુલ્લા લંબઘનનું ક્ષેત્રફળ) તરીકે ઓળખાય છે જુઓ આકૃતિ 9.18. આમ, લંબઘનના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (lateral surface area) $2(h \times l + b \times h)$ અથવા $2h(l + b)$ વડે મેળવી શકાય છે.



આકૃતિ 9.18

આટલું કરો

(i) તમારા વર્ગમાં શિક્ષક જે ડસ્ટર લઈને આવે છે તે લંબઘન આકારનું છે. આ ડસ્ટરની ઊંચાઈ જેટલી પહોળાઈ ધરાવતી ભૂરા રંગની કાગળની પટ્ટીને ડસ્ટરની આસ-પાસની ચારે સપાટી સાથે ગોઠવીને એક પરિભ્રમણ પૂરું કરી વધારાની કાગળની પટ્ટી દૂર કરો. હવે આ કાગળની પટ્ટી દ્વારા લંબઘનની ચારે સપાટી ઘેરાયેલી છે. હવે આ કાગળની પટ્ટીને હટાવીને તેનું ક્ષેત્રફળ માપો. શું આ માપ ડસ્ટરના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ જેટલું છે ?

(ii) તમારા વર્ગખંડની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ માપો અને નીચે માગ્યા મુજબનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

(a) દરવાજા અને બારીને બાદ કરતા વધતું ઓરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ

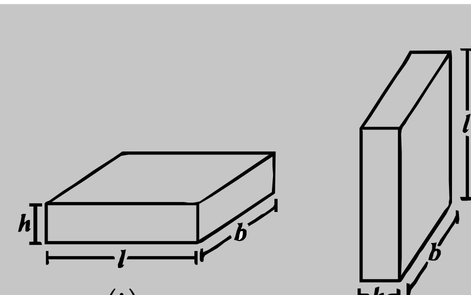
(b) આ ઓરડાનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ

(c) ઓરડાને જે ભાગમાં રંગવાનો છે તેનું કુલ ક્ષેત્રફળ

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું આપણે કહી શકીએ કે લંબઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ
= પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ + 2 (તળિયાનું ક્ષેત્રફળ) ?

2. જો આકૃતિ 9.19 (i)માં દર્શાવેલા લંબઘનની ઊંચાઈ અને આધારની લંબાઈને પરસ્પર બદલી નાખીએ તો આકૃતિ 9.19 (ii)માં દર્શાવેલ લંબઘન પ્રાપ્ત થાય છે તો તેનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ બદલાઇ જશે ?

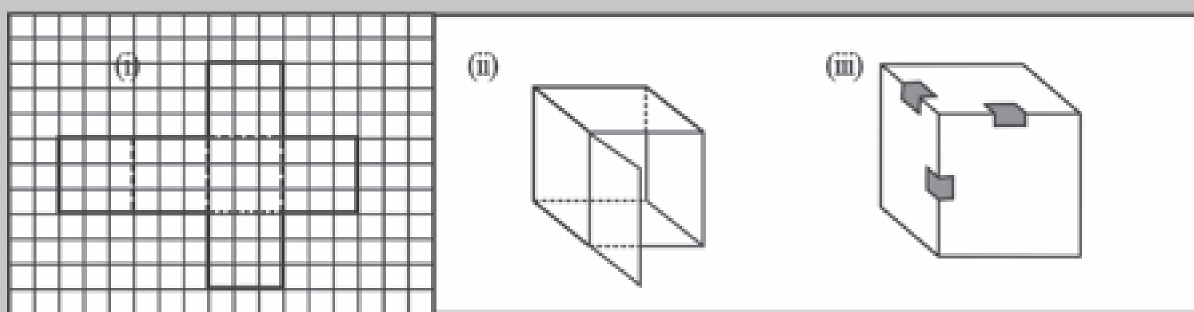


આકૃતિ 9.19

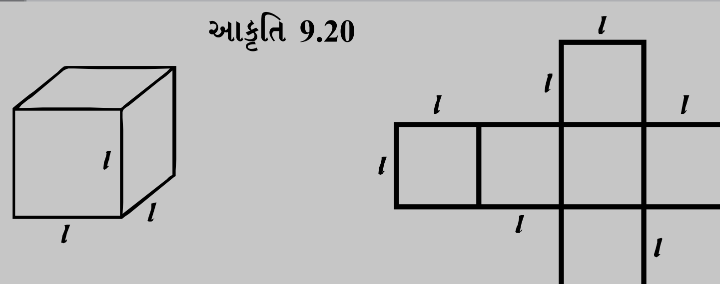
9.4.2 ઘન (Cube)

આટલું કરો

એક આલેખપત્ર પર આકૃતિ 9.20 (i)માં દર્શાવ્યા મુજબની રેખાકૃતિ દોરો અને તેને કાપો. તમે જાણો છો તેમ આ રેખાકૃતિ એક ઘનનું પૃષ્ઠફળ દર્શાવે છે. આ રેખાકૃતિને આકૃતિ 9.20 (ii)માં દર્શાવ્યા મુજબ વાળો અને આકૃતિ 9.20 (iii)માં દર્શાવ્યા મુજબ ગમ પટ્ટી લગાવીને ઘન તૈયાર કરો.



આકૃતિ 9.20



(i) (ii)

આકૃતિ 9.21

(a) આકૃતિ 9.21 (i)માં દર્શાવેલ ઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ કેટલી છે ? યાદ રાખો કે ઘનની દરેક સપાટી ચોરસ આકારની હોય છે. તેથી ઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ સમાન હોય છે.

(b) ઘનની દરેક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ લખો. શું બધાં ફલકોનું ક્ષેત્રફળ સમાન મળે છે ?

(c) આ ઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ લખો.

(d) જો ઘનની પ્રત્યેક બાજુની લંબાઈ l હોય, તો પ્રત્યેક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શું થશે ? (આકૃતિ 9.21 (ii) જુઓ.)

શું એમ કહી શકાય કે l લંબાઈની બાજુવાળા ઘનનું પૃષ્ઠફળ $6l^2$ થાય ?

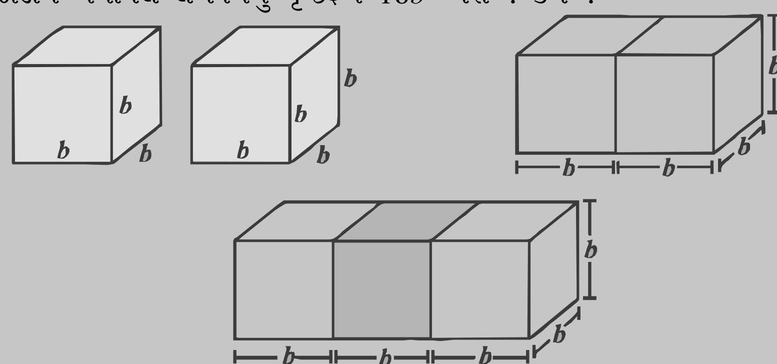
પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 9.22માં દર્શાવેલ ઘન Aનું પૃષ્ઠફળ અને ઘન Bનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ શોધો.

આકૃતિ 9.22

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

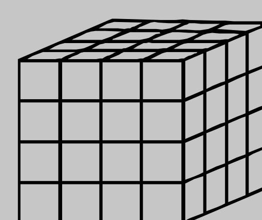
(i) આકૃતિ 9.23 માં દર્શાવ્યા મુજબ b બાજુવાળા બે ઘનને જોડીને એક લંબઘન બનાવ્યો છે તો આ લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શું હશે ? શું એ $12b^2$ હશે ? શું આવી જ રીતે b બાજુ ધરાવતાં ત્રણ ઘન જોડીને બનાવેલ લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $18b^2$ થશે ? કેમ ?



આકૃતિ 9.23

(ii) સમાન બાજુવાળા 12 લંબઘનને કઈ રીતે ગોઠવીએ તો તેનાથી બનતા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ લઘુતમ થાય ?

(iii) આકૃતિ 9.24 માં દર્શાવ્યા મુજબ એક ઘન ઉપર રંગ કર્યા બાદ તેના એકસરખા 64 ઘન બને તેમ કાપવામાં આવેલ છે અને અલગ કરવામાં આવે છે. તો આમાંથી કેટલા ઘન એવા હશે કે તેની એક પણ બાજુ રંગેલી નહીં હોય ? કેટલા ઘનનું માત્ર એક ફલક (બાજુ) રંગેલું હશે ? કેટલા ઘનની બે સપાટી રંગેલી હશે ? અને કેટલા ઘનની ત્રણ સપાટી રંગેલી હશે ?



આકૃતિ 9.24

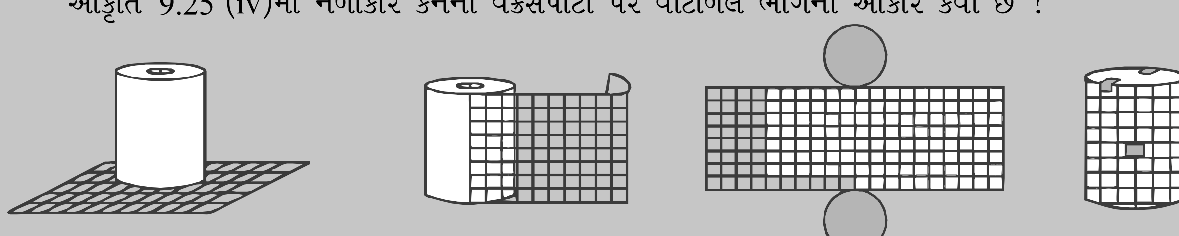
9.4.3 નળાકાર (C   inder)

આપણે જેટલા નળાકાર (Cylinder) જોઈએ છીએ તેમાંથી મોટા ભાગના લંબવૃત્તીય નળાકાર હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ડબ્બો, ભૂંગળું (ગોળ પાઈપ), ટ્યૂબલાઇટ, પાણીની પાઇપ વગેરે.

આટલું કરો

(i) આકૃતિ 9.25 (i)માં દર્શાવ્યા મુજબ એક આલેખપત્ર પર એક નળાકાર કેન કે ડબ્બાને રાખી તેના તળિયાના માપનો ટુકડો કાપીને અલગ કરો. હવે આકૃતિ 9.25 (ii)માં બતાવ્યા મુજબ નળાકારની ઊંચાઈ જેટલી પહોળાઈના એક આલેખપત્રને નળાકારની ફરતે વીંટાળો અને વધારાનો આલેખપત્ર કાપી નાખો. હવે આકૃતિ 9.25 (iii)માં દર્શાવ્યા મુજબના બે વર્તુળાકાર અને એક લંબચોરસ આલેખના ટુકડાને આકૃતિ 9.25 (iv)માં બતાવ્યા મુજબ ગમપટ્ટીથી જોડી નળાકાર તૈયાર કરો.

આકૃતિ 9.25 (iv)માં નળાકાર કેનની વક્રસપાટી પર વીંટાળેલ ભાગનો આકાર કેવો છે ?

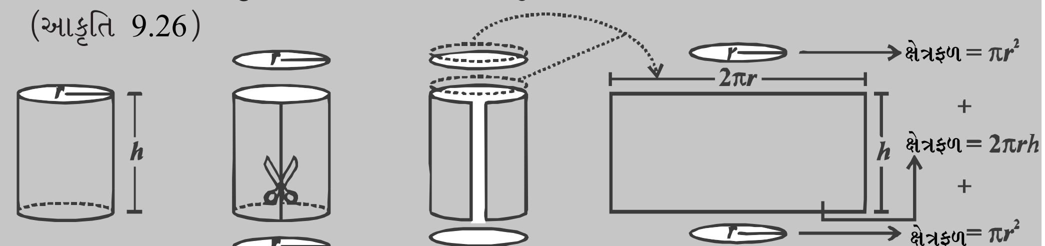


(i) (ii) (iiii) (iv)

આકૃતિ 9.25

આ આકાર ચોક્કસપણે લંબચોરસ જ છે. હવે જ્યારે આપણે નળાકારના આ ભાગોને એકબીજા સાથે પટ્ટીથી જોડીએ ત્યારે આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે લંબચોરસ પટ્ટીની લંબાઈ નળાકારના તળિયે (કે ઉપરની તરફ) આવેલા વર્તુળના પરિઘ જેટલી હોય છે. વર્તુળાકાર આધાર(તળિયા)ની ત્રિજ્યા r, લંબચોરસ પટ્ટીની લંબાઈ l અને પટ્ટીની પહોળાઈ h માપો. શું $2\pi r =$ પટ્ટીની લંબાઈ થાય છે ? લંબચોરસ પટ્ટીનું ક્ષેત્રફળ $2\pi rh$ થાય છે ? ચકાસો. હવે નળાકાર બનાવવામાં વપરાયેલ આલેખપત્ર પરના ચોરસોની સંખ્યા ગણીને નક્કી કરો કે નળાકાર બનાવવા કેટલા ચોરસ એકમનો ઉપયોગ થયેલ છે. શું ગણતરી કરેલ આ માપ લગભગ $2\pi r\ (r + h)$ના માપ જેટલું છે ?

(ii) આપણે નળાકારના પૃષ્ઠફળનો $2\pi r\ (r + h)$ સાથેનો સંબંધ બીજી રીતે પણ મેળવી શકીએ છીએ. નીચેની આકૃતિ 9.26 માં દર્શાવ્યા મુજબના એક નળાકારને કાપવાની કલ્પના કરો. (આકૃતિ 9.26)



આકૃતિ 9.26

નોંધ : જ્યારે πની કિંમત વિષે કંઈ કહેવામાં આવેલ ન હોય ત્યારે તેની કિંમત આપણે $\frac{22}{7}$ લઈશું.

આથી નળાકારનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ) $2\pi rh$ છે.

નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r\ (r + h)$

પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 9.27 માં દર્શાવેલા નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

આકૃતિ 9.27

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નોંધ કરો કે કોઈ નળાકારના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ (વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ) નળાકારના આધારના પરિઘ × નળાકારની ઊંચાઈ જેટલું હોય છે. શું આપણે લંબઘનના પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ(ચારે દીવાલનું ક્ષેત્રફળ)ને આધાર(તળિયા)ના લંબચોરસની પરિમિતિ × લંબઘનની ઊંચાઈના સ્વરૂપમાં લખી શકીએ ?

ઉદાહરણ 4 : એક માછલીઘર લંબઘન આકારનું છે, તેનું બહારથી માપ 80 સેમી × 30 સેમી × 40 સેમી છે. હવે આ માછલીઘરના તળિયા પર, બન્ને બાજુ પર, અને માછલીઘરની પાછળની સપાટી પર કાગળ લગાડવાનો છે તો જોઈતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : માછલીઘરની લંબાઈ (l) = 80 સેમી

માછલીઘરની પહોળાઈ (b) = 30 સેમી

માછલીઘરની ઊંચાઈ (h) = 40 સેમી છે.

તેથી તળિયાનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b = 80 \times 30 = 2400$ સેમી^{2}

એક સાઇડ(બાજુ)નું ક્ષેત્રફળ $= b \times h = 30 \times 40 = 1200$ સેમી^{2}

પાછલા ફલકનું ક્ષેત્રફળ $= l \times h = 80 \times 40 = 3200$ સેમી^{2}

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = તળિયાનું ક્ષેત્રફળ + પાછળના ફલકનું ક્ષેત્રફળ + (2 × બાજુ પરના ફલકનું ક્ષેત્રફળ)

$= 2400 + 3200 + (2 \times 1200) = 8000$ સેમી^{2}

તેથી જરૂરી રંગીન કાગળનું ક્ષેત્રફળ 8000 સેમી^{2} છે.

ઉદાહરણ 5 : એક લંબઘન આકારના ઓરડાનું અંદરનું માપ 12 મી × 8 મી × 4 મી છે. ઓરડો રંગવાનો ભાવ 5 રૂપિયા પ્રતિ ચોરસ મીટર હોય તો ઓરડાની ચારે દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ કેટલો થશે ? અને જો ઓરડાની છતને પણ રંગીએ તો રંગ કરાવવાનો ખર્ચ કેટલો થશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ઓરડાની લંબાઈ (l) = 12 મીટર

ઓરડાની પહોળાઈ (b) = 8 મીટર

ઓરડાની ઊંચાઈ (h) = 4 મીટર

ઓરડાની ચારે દીવાલનું ક્ષેત્રફળ = ભોંયતળિયાની પરિમિતિ × ઓરડાની ઊંચાઈ

$= 2\ (l + b) \times h$

$= 2\ (12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4 = 160$ મીટર^2

હવે રંગ કરાવવાનો ખર્ચ 5 રૂપિયા/મીટર^2 છે.

તેથી ઓરડાની ચારે દીવાલ રંગવાનો કુલ ખર્ચ = ₹(160 × 5) = 800 રૂપિયા

છતનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b = 12 \times 8 = 96$ મી^{2}

માટે છતને રંગવાનો ખર્ચ = 96 × 5 = 480 રૂપિયા

તેથી ઓરડાને રંગવાનો કુલ ખર્ચ = ચાર દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ + છત રંગવાનો ખર્ચ

= 800 + 480 = ₹ 1280

ઉદાહરણ 6 : એક મહેલમાં 24 નળાકાર સ્તંભો છે. દરેક સ્તંભની ત્રિજ્યા 28 સેમી અને ઊંચાઈ 4 મીટર છે. 8 રૂપિયા પ્રતિ ચોરસ મીટરના ભાવથી બધા સ્તંભોની વક્રસપાટીને રંગવાનો કુલ ખર્ચ કેટલો થશે ?

ઉકેલ : નળાકાર સ્તંભની ત્રિજ્યા = 28 સેમી = 0.28 મીટર

નળાકાર સ્તંભની ઊંચાઈ = 4 મીટર

હવે, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$

સ્તંભની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04$ મી^{2}

આવા 24 સ્તંભોની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 7.04 \times 24 = 168.96$ મી^{2}

વળી, 1 મીટર^2 રંગકામ માટેનો ખર્ચ = ₹ 8 છે.

તેથી 168.96 મીટર^2 રંગકામ કરવાનો કુલ ખર્ચ = 168.96 × 8 = ₹ 1351.68

ઉદાહરણ 7 : એક નળાકારની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને કુલ પૃષ્ઠફળ 968 સેમી^{2} છે, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ = h છે.

નળાકારની ત્રિજ્યા $= r = 7$ સેમી

નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= 2\pi r\ (h + r)$

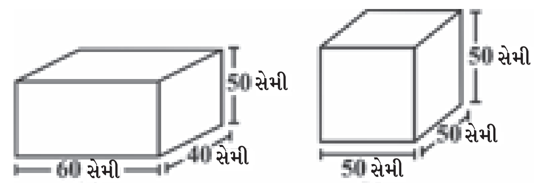
$\therefore\ 968 = 2 \times \frac{22}{7} \times 7\ (h + 7)$

$\therefore\ h = 15$ સેમી થાય.

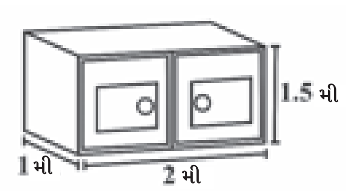
એટલે કે નળાકારની ઊંચાઈ 15 સેમી હશે.

સ્વાધ્યાય 9.2

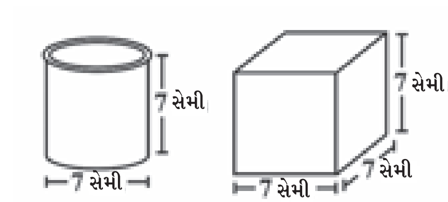
1. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા મુજબના માપનો એક લંબઘન અને એક સમઘન છે. આ બન્ને ડબ્બામાંથી કયો ડબ્બો બનાવવામાં ઓછી સામગ્રી વપરાશે ?



2. 80 સેમી × 48 સેમી × 24 સેમી માપ ધરાવતી એક સૂટકેસને તાડપત્રીના કપડાથી ઢાંકવાની છે (કવર બનાવવાનું છે). આવી 100 સૂટકેસને ઢાંકવા માટે 96 સેમી પહોળાઈ ધરાવતી તાડપત્રીના કેટલા મીટર કાપડની જરૂર પડશે ?
3. એક એવા ઘનની બાજુનું માપ શોધો કે જેનું પૃષ્ઠફળ 600 સેમી^{2} હોય ?
4. રુખસારે 1 મી × 2 મી × 1.5 મી માપવાળી પેટીને બહારથી રંગ કર્યો. જો તેણે પેટીના તળિયા સિવાય બહારની તરફ બધે રંગ કર્યો હોય, તો તેણે કેટલા પૃષ્ઠફળમાં રંગ કર્યો હશે ?

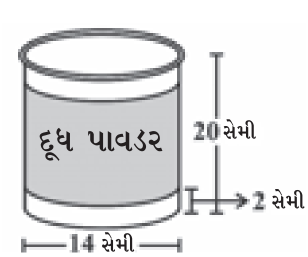


5. ડેનિયલ એક લંબઘન આકારના ઓરડાની દીવાલ અને છતને રંગે છે જેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ ક્રમશઃ 15 મી, 10 મી અને 7 મી છે. રંગના એક ડબ્બામાંથી 100 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ પર રંગ કરી શકાતો હોય, તો ઓરડાને રંગવા માટે કેટલા ડબ્બા રંગ જોઈશે ?
6. જમણી બાજુએ આપેલી આકૃતિમાંના બંને ડબ્બા કઈ રીતે સમાન છે અને કઈ રીતે એક બીજાથી જુદા પડે છે ? કયા ડબ્બાનું પાર્શ્વ પૃષ્ઠફળ વધારે હશે ?



7. 7 મીટર ત્રિજ્યા અને 3 મીટર ઊંચાઈવાળી એક બંધ નળાકાર ટાંકી ધાતુના પતરામાંથી બનાવવામાં આવેલ છે. આ ટાંકીને બનાવવા માટે ધાતુનું કેટલું પતરું જોઈશે ?
8. એક ખુલ્લા નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 4224 સેમી^{2} છે. આ નળાકારને તેની ઊંચાઈ તરફથી કાપીને 33 સેમી પહોળાઈની એક લંબચોરસ આકારની સીટ બનાવવામાં આવે છે, તો લંબચોરસ સીટની પરિમિતિ મેળવો.
9. એક રસ્તાને એક વખત સમતલ કરવા માટે રોલરને 750 વખત પરિભ્રમણ કરવું પડે છે. હવે જો રોલરનો વ્યાસ 84 સેમી અને પહોળાઈ 1 મીટર હોય તો રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10. એક કંપની તેના દૂધ પાવડરને એવા નળાકાર ડબ્બામાં પેક કરે છે જેનો વ્યાસ 14 સેમી અને ઊંચાઈ 20 સેમી હોય. બાજુની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે કંપની ડબ્બાની વક્રસપાટી પર ફરતે લેબલ લગાવે છે. જો આ લેબલ નળાકારના શીર્ષ અને તળિયા બન્નેથી 2 સેમી દૂર ચોંટાડવામાં આવતું હોય તો લેબલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

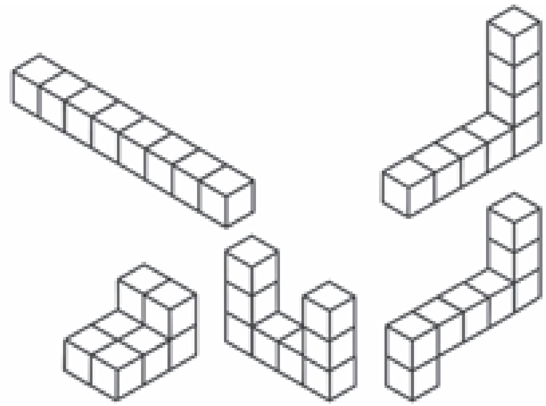


9.5 ઘન, લંબઘન અને નળાકારનું ઘનફળ/કદ

ત્રિપરિમાણીય આકાર દ્વારા ઘેરાતી જગ્યાને તેનું ઘનફળ/કદ (Volume) કહેવામાં આવે છે. તમારી આસપાસની વસ્તુઓના ઘનફળ(કદ)ની સરખામણી કરવાનો પ્રયત્ન કરો. ઉદાહરણ તરીકે, ઓરડામાં રાખેલા કબાટના ઘનફળની સરખામણીમાં તે ઓરડાનું ઘનફળ વધારે છે. એ જ રીતે તમારા પેન્સિલબૉક્સનું ઘનફળ તેમાં રાખેલી પેન્સિલ કે દરેક રબ્બરના ઘનફળ કરતા વધારે છે. શું તમે એમાંથી કોઈ પણ વસ્તુનું ઘનફળ માપી શકો છો ?

970FZS

યાદ કરો કે આપણે કોઈ પણ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે આલેખપત્ર જેવા ચોરસ એકમોનો ઉપયોગ કરતા હતા. અહીં આપણે ઘનાકાર વસ્તુનું ઘનફળ મેળવવા માટે ઘન એકમોનો ઉપયોગ કરીશું કારણ કે ઘન એ સૌથી વધારે સુવિધાયુક્ત ઠોસ આકાર છે. (જેમ સપાટીના ક્ષેત્રફળના માપન માટે ચોરસ સૌથી વધારે સુવિધાયુક્ત આકાર છે, તેમ ઘન વસ્તુનું ઘનફળ માપવા માટે ઘન એ સૌથી વધુ સુવિધાયુક્ત ઘન આકાર છે.)


આકૃતિ 9.28

કોઈ પણ ઘન પદાર્થનું ઘનફળ મેળવવા માટે આપણે જે-તે ઘનાકાર વસ્તુને ઘન એકમોમાં વિભાજિત કરવાની જરૂર પડે છે. આકૃતિ 9.28 માં આપેલ દરેક ઘન આકારનું ઘનફળ 8 ઘન એકમ છે. આ બાબતે વિચારો.

આથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પણ ઠોસ(ઘન)ના ઘનફળ માપવા માટે આપણે તેમાં રહેલા ઘન એકમો ગણીએ છીએ.

1 ઘન સેમી = 1 સેમી × 1 સેમી × 1 સેમી = 1 સેમી^{3}

= 10 મિમી × 10 મિમી × 10 મિમી = ... મિમી^{3}

1 ઘન મીટર = 1 મી × 1 મી × 1 મી = 1 મી^{3}

= .... સેમી^{3}

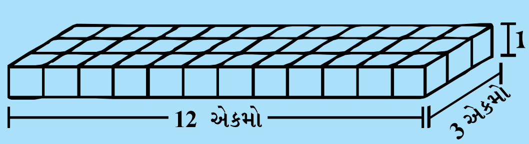
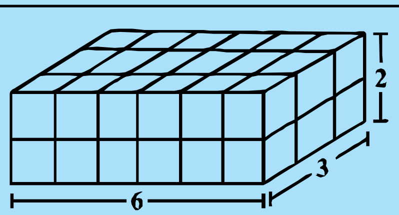
1 ઘન મિલીમીટર = 1 મિમી × 1 મિમી × 1 મિમી = 1 મિમી^{3}

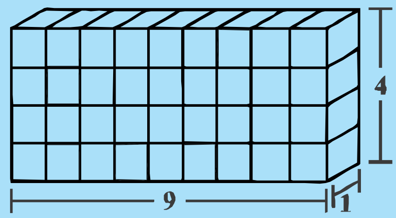
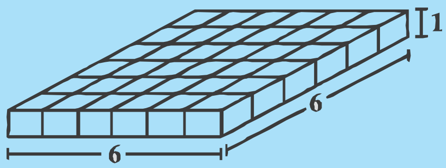
= 0.1 સેમી × 0.1 સેમી × 0.1 સેમી = ... સેમી^{3}

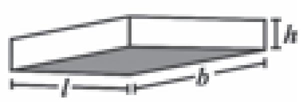
હવે આપણે ઘન, લંબઘન અને નળાકારનાં ઘનફળ મેળવવા માટેનાં સૂત્ર શોધીશું. ચાલો, દરેક ઘન ઉપર એક પછી એક ચર્ચા કરીએ.

9.5.1 લંબઘન

સમાન આકાર (પ્રત્યેક ઘનની લંબાઈ સમાન) હોય તેવા 36 સમઘન લો અને તેમને વ્યવસ્થિત ગોઠવીને લંબઘન (Cuboid) બનાવો. તમે આવા ઘણા પ્રકારના લંબઘન બનાવી શકો છો. નીચેના કોષ્ટક ઉપર વિચાર કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો.

	ઘન	લંબાઈ	પહોળાઈ	ઊંચાઈ	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...

(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

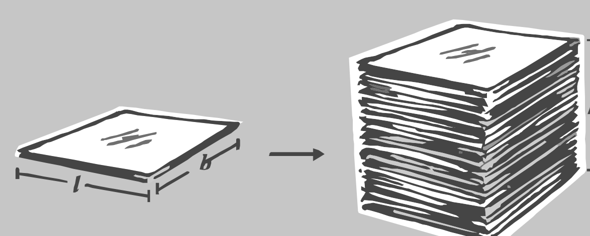


ઉપર દર્શાવેલ સારણીમાં તમે શું જોયું ?
સારણીના દરેક લંબઘન બનાવવામાં આપણે 36 ઘનનો ઉપયોગ કરેલ છે, તેથી પ્રત્યેક લંબઘનનું ઘનફળ પણ 36 ઘન એકમ થશે. આ ઉપરાંત દરેક લંબઘનનું ઘનફળ તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈના ગુણાકારને સમાન છે, તે આપણે અનુભવે જોયું. આથી, ઉપરના ઉદાહરણના આધારે આપણે કહી શકીએ કે, લંબઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ = $l \times b \times h$

આ ઉપરાંત આ આપણે લંબઘનનું ઘનફળ = લંબઘનના આધારનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ પણ કહી શકીએ કારણ કે $l \times b$ = લંબઘનના આધારનું ક્ષેત્રફળ થાય છે.

આટલું કરો

એક કાગળ લો અને તેનું ક્ષેત્રફળ માપો. આ માપનાં જ બીજાં કાગળ લઈને કાગળની થપ્પી લગાવી એક લંબઘન બનાવો (આકૃતિ 9.29 મુજબ). આ થપ્પીની ઊંચાઈ માપો. કાગળનું ક્ષેત્રફળ અને થપ્પીની ઊંચાઈના ગુણાકારનું મૂલ્ય મેળવી લંબઘનનું ઘનફળ જાણો.



આકૃતિ 9.29

આ પ્રવૃત્તિ પરથી આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે ઘનનું ઘનફળ આ પ્રકારે પણ મેળવી શકાય. (જો કોઈ ઘન આકારનું શીર્ષ (TOP) અને આધાર (BASE) એકરૂપ હોય અને એકબીજાને સમાંતર હોય તો તેની ધાર/કિનારી (EDGE), આધાર(BASE)ને લંબ હશે.) જેનું ઘનફળ શોધવામાં આ રીતના ઉપયોગ કરી શકાતો હોય તેવી વસ્તુઓ બાબતે તમે વિચારી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

નીચેની આકૃતિ 9.30માં દર્શાવેલા લંબઘનનું ઘનફળ શોધો.

(i)

આકૃતિ 9.30

9.5.2 ઘન

ઘન (Cube) એ લંબઘનનો એક ખાસ પ્રકાર છે. જેમાં $l = b = h$ થતા હોય,
એટલે કે ઘનનું ઘનફળ $= l \times l \times l = l^3$

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલા ઘનના ઘનફળ શોધો.

(a) 4 સેમી બાજુવાળો ઘન (b) 1.5 મીટર બાજુવાળો ઘન

આટલું કરો

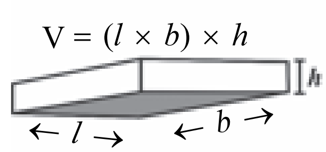
સમાન આકારવાળા 64 ઘનનો ઉપયોગ કરીને જેટલા પ્રકારના લંબઘન બનાવી શકો તેટલા બનાવો અને આ પ્રત્યેક સ્વરૂપના લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શોધો. શું સમાન ઘનફળવાળી ઘન આકૃતિઓના પૃષ્ઠફળ પણ સમાન હોય છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

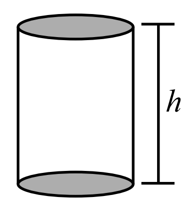
એક કંપની બિસ્કિટ વેચે છે. બિસ્કિટને પૅક કરવા માટે લંબઘન આકારના ડબ્બાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ડબ્બો A $\rightarrow$ 3 સેમી $\times$ 8 સેમી $\times$ 20 સેમી અને ડબ્બો B $\rightarrow$ 4 સેમી $\times$ 12 સેમી $\times$ 10 સેમીનો છે. તો કંપનીને કયા માપના ડબ્બાનો ઉપયોગ કરવાથી આર્થિક લાભ થશે ? કેમ ? શું તમે આવા કોઈ બીજા આકારના ડબ્બાનો ઉપયોગ કરવાની સલાહ આપી શકો કે જેનું ઘનફળ તેના જેટલું જ હોય પરંતુ આર્થિક દષ્ટિએ વધુ લાભદાયક હોય.

9.5.3 નળાકાર

આપણે જાણીએ છીએ કે લંબઘનનું ઘનફળ તેના આકારના ક્ષેત્રફળ અને તેની ઊંચાઈના ગુણાકાર દ્વારા મેળવી શકાય છે. શું આ જ રીતે આપણે નળાકારનું ઘનફળ મેળવી શકીએ ?



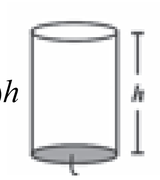
લંબઘન



નળાકાર

લંબઘનની જેમ નળાકાર (Cylinder)માં પણ એક આધાર (Base) અને શીર્ષ (Top) હોય છે, જે એકબીજાને એકરૂપ અને સમાંતર હોય છે. લંબઘનની જેમ નળાકારની વક્રસપાટી તેના આધારને લંબ હોય છે.

$V = (\pi r^2)h$



આધારનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

તેથી, લંબઘનનું ઘનફળ = આધારનું ક્ષેત્રફળ $\times$ ઊંચાઈ

$= (l \times b) \times h = lbh$

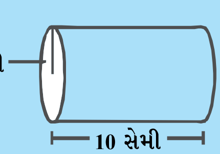
નળાકારનું ઘનફળ= આધારનું ક્ષેત્રફળ $\times$ ઊંચાઈ

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

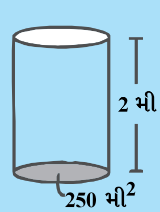
પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલા નળાકારના ઘનફળ મેળવો.

(i)



(ii)



9HF35E

9.6 ઘનફળ (કદ) અને ક્ષમતા (o ume and Ca acit)

આ બે શબ્દોમાં વધારે તફાવત નથી.

(a) કોઈ વસ્તુ દ્વારા ઘેરાયેલી જગ્યાની માત્રાને ઘનફળ (કદ - Volume) કહે છે.

(b) કોઈ વાસણમાં ભરી શકાતી વસ્તુની માત્રાને તે વાસણની ક્ષમતા (Capacity) કહેવામાં આવે છે.

નોંધ : જો કોઈ પાણી ભરવાના ધાતુના વાસણમાં 100 સેમી^{3} પાણી ભરી શકાય તો તે ધાતુના વાસણની ક્ષમતા 100 સેમી^{3} છે.

ક્ષમતાને લિટરમાં પણ માપી શકાય છે. લિટર અને સેમી^{3}માં નીચે મુજબ સંબંધ છે :

1 મિલીલિટર = 1 સેમી^{3}, 1 લિટર = 1000 સેમી^{3}. આમ, 1 મીટર^3 = 1000000 સેમી^{3} = 1000 લિટર

ઉદાહરણ 8 : જેનું ઘનફળ 275 સેમી^{3} અને આધારનું ક્ષેત્રફળ 25 સેમી^{2} હોય, એવા લંબઘનની ઊંચાઈ મેળવો.

ઉકેલ : લંબઘનનું ઘનફળ = આધારનું ક્ષેત્રફળ $\times$ ઊંચાઈ

તેથી લંબઘનની ઊંચાઈ $= \dfrac{\text{લંબઘનનું ઘનફળ}}{\text{આધારનું ક્ષેત્રફળ}}$

$= \dfrac{275}{25} = 11$ સેમી

આ રીતે લંબઘનની ઊંચાઈ 11 સેમી છે.

ઉદાહરણ 9 : એક લંબઘન આકારનું ગોદામ છે. તેનું માપ = 60 મી $\times$ 40 મી $\times$ 30 મી છે. આ ગોદામની અંદર 0.8 મી^{3} ઘનફળ ધરાવતાં કેટલા ડબ્બા રાખી શકાય ?

ઉકેલ : એક ડબ્બાનું ઘનફળ = 0.8 મી^{3}

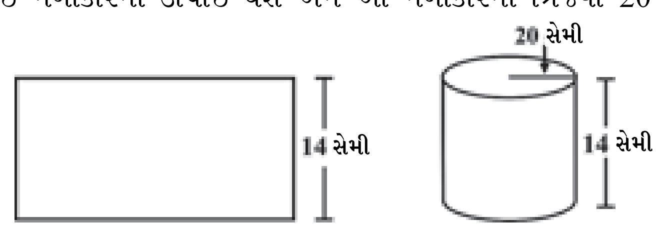
ગોદામનું ઘનફળ = $60 \times 40 \times 30 = 72000$ મી^{3}

ગોદામની અંદર રાખી શકાય તેમ હોય તે ડબ્બાની સંખ્યા $= \dfrac{\text{ગોદામનું ઘનફળ}}{\text{એક ડબ્બાનું ઘનફળ}} = \dfrac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90{,}000$

આ રીતે, ગોદામની અંદર 90,000 ડબ્બા રાખી શકાશે.

ઉદાહરણ 10 : 14 સેમી પહોળાઈ ધરાવતાં કાગળને તેની પહોળાઈની દિશામાં વાળીને 20 સેમી ત્રિજ્યાવાળો એક નળાકાર બનાવવામાં આવે છે, તો નળાકારનું ઘનફળ મેળવો (જુઓ આકૃતિ 9.31). (અહીં π ની કિંમત $\frac{22}{7}$ લેવી.)

ઉકેલ : કાગળને તેની પહોળાઈની દિશામાંથી ગોળ વાળીને નળાકાર બનાવવામાં આવેલ છે, તેથી કાગળની પહોળાઈ નળાકારની ઊંચાઈ થશે અને આ નળાકારની ત્રિજ્યા 20 સેમી છે.



આકૃતિ 9.31

નળાકારની ઊંચાઈ (h) = 14 સેમી

ત્રિજ્યા(r) = 20 સેમી

નળાકારનું ઘનફળ = V $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600$ સેમી^{3}

તેથી નળાકારનું ઘનફળ 17600 સેમી^{3} થશે.

ઉદાહરણ 11 : 11 સેમી × 4 સેમી માપ ધરાવતાં લંબચોરસ કાગળના ટુકડાને એકબીજા પર વધુ ન રહે તે રીતે વાળીને 4 સેમી ઊંચાઈનો એક નળાકાર બનાવવામાં આવે છે, તો આ નળાકારનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં કાગળની લંબાઈ નળાકારના આધારનો પરિઘ બની જાય છે અને કાગળની પહોળાઈ એ નળાકારની ઊંચાઈ બની જાય છે.

ધારો કે નળાકારની ત્રિજ્યા $= r$ અને ઊંચાઈ $= h$ છે.

નળાકારના આધારનો પરિઘ $= 2\pi r = 11$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

તેથી, $r = \frac{7}{4}$ સેમી થશે.

નળાકારનું ઘનફળ $(v) = \pi r^2 h$

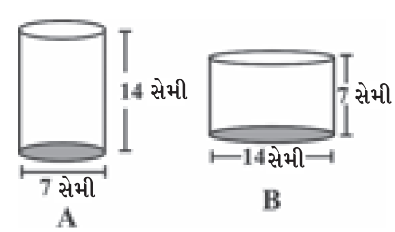
$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 = 38.5 \text{ સેમી}^3$$

તેથી નળાકારનું ઘનફળ 38.5 ઘન સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 9.3

1. તમને એક નળાકાર ટાંકી આપેલ છે. નીચે આપેલી કઈ પરિસ્થિતિમાં તમે તેનું પૃષ્ઠફળ મેળવશો અને કઈ પરિસ્થિતિમાં તેનું ઘનફળ મેળવશો ?
   (a) નળાકાર ટાંકીમાં કેટલું પાણી રાખી શકાશે, તે નક્કી કરવા માટે.
   (b) નળાકાર ટાંકીને પ્લાસ્ટર કરવા માટે જરૂરી સિમેન્ટની થેલીઓની સંખ્યા જાણવા.
   (c) નળાકાર ટાંકીમાં ભરેલા પાણીથી પાણીની કેટલી નાની ટાંકીઓ ભરાશે તેની સંખ્યા જાણવા.

2. નળાકાર Aનો વ્યાસ 7 સેમી અને ઊંચાઈ 14 સેમી છે. નળાકાર Bનો વ્યાસ 14 સેમી અને ઊંચાઈ 7 સેમી છે. ગણતરી કર્યા વગર તમે કહી શકશો કે ઉપરના બે નળાકારમાંથી કોનું ઘનફળ વધારે હશે ? બંને નળાકારનું ઘનફળ મેળવી તમારા જવાબને ચકાસો. આ ઉપરાંત એ પણ ચકાસો કે વધુ ઘનફળ ધરાવતાં નળાકારનું પૃષ્ઠફળ પણ વધારે છે ?

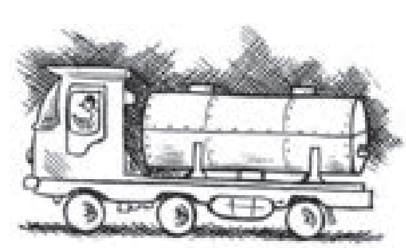


3. એક લંબઘનના આધારનું ક્ષેત્રફળ 180 સેમી^{2} છે અને તેનું ઘનફળ 900 સેમી^{3} છે, તો તે લંબઘનની ઊંચાઈ શોધો.

4. એક લંબઘનનું માપ 60 સેમી × 54 સેમી × 30 સેમી છે. આ લંબઘનની અંદર 6 સેમી બાજુવાળા કેટલા નાના ઘન રાખી શકાશે ?

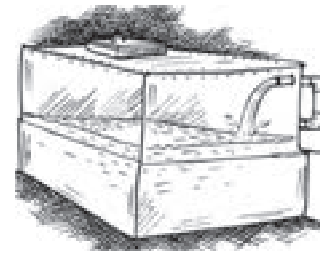
5. જેનું ઘનફળ 1.54 મી^{3} અને તેના આધારનો વ્યાસ 140 સેમી હોય એવા નળાકારની ઊંચાઈ મેળવો.

6. એક દૂધનું ટેન્કર નળાકાર છે, જેની ત્રિજ્યા 1.5 મીટર અને લંબાઈ 7 મીટર છે. આ ટેન્કરમાં કેટલા લિટર દૂધ ભરી શકાશે ?



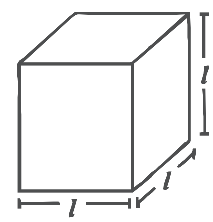
7. જો કોઈ ઘનની દરેક બાજુને બમણી કરી દેવામાં આવે તો
   (i) તેના પૃષ્ઠફળમાં કેટલા ગણો વધારો થશે ?
   (ii) તેના ઘનફળમાં કેટલા ગણો વધારો થશે ?

8. એક કુંડની અંદર 60 લિટર પાણી પ્રતિ મિનિટના દરથી પડે છે. જો કુંડનું ઘનફળ 108 મી^{3} હોય, તો આ કુંડને પાણીથી સંપૂર્ણ ભરાતા કેટલા કલાક લાગશે ?



આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. એક **ઘનનું પૃષ્ઠફળ** તેના ફલકોના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે.



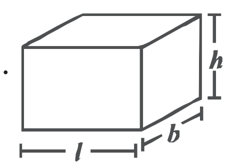
ઘન

2. લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 2(lb + bh + hl)$

ઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 6l^2$

નળાકારનું પૃષ્ઠફળ $= 2\pi r\ (r + h)$

3. કોઈ પણ ઘન વસ્તુ દ્વારા ઘેરાયેલી જગ્યાની માત્રાને તે ઘનાકારનું **ઘનફળ** કહેવામાં આવે છે.

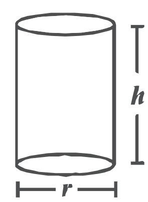


લંબઘન

4. લંબઘનનું ઘનફળ $= l \times b \times h$

ઘનનું ઘનફળ $= l^3$

નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$



નળાકાર

5. (i) 1 સેમી^{3} = 1 મિલીલિટર

(ii) 1 લિટર = 1000 સેમી^{3}

(iii) 1 મી^{3} = 1000000 સેમી^{3} = 1000 લિટર

પ્રકરણ 10

ઘાત અને ઘાતાંક

10.1 પ્રાસ્તાવિક

શું તમે જાણો છો ?

પૃથ્વીનું વજન 5,976,000,000,000,000,000,000,000 કિગ્રા છે. અગાઉના ધોરણમાં આપણે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છીએ કે આ પ્રકારની મોટી સંખ્યાઓને ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીને કેવી રીતે વધારે સરળતાથી લખી શકાય. દા.ત., 5.976×10^{24} કિગ્રા. આપણે 10^{24}ને 10ની 24 ઘાત એમ વાંચીશું.

ઘાતાંક

10^{24}

આધાર

બોલીશું :
10 ની 24 ઘાત

આપણે જાણીએ છીએ કે $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

તેમજ $2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2$ ... (m વખત)

ચાલો હવે 2^{-2}નું મૂલ્ય કોના બરાબર છે તે શોધીએ.

અહીં ઘાતાંક ઋણ પૂર્ણાંક છે.

10.2 ઋણ પૂર્ણાંક ઘાતાંક

તમે જાણો છો કે $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

ઘાતાંકમાં 1નો ઘટાડો થતાં, મૂલ્ય અગાઉના મૂલ્ય કરતાં $\frac{1}{10}$ જેટલું થાય છે.

ઉપરની ક્રિયાને આગળ વધારતાં

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

તે જ રીતે $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

તો 10^{-10}નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

નીચેનાં પદોને ધ્યાનમાં લો.

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$

$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$

$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$

અગાઉની સંખ્યાને 3 વડે ભાગતા

ઉપરનાં પદોને જોતાં કહી શકાય કે,

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

આ જ પ્રમાણે હવે તમે 2^{-2} નું મૂલ્ય શોધી શકશો.
અહીં,

$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ અથવા $10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ અથવા $10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ અથવા $3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$ વગેરે

આમ, આપણે કહી શકીએ કે કોઈપણ શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, જ્યાં m એક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. a^{-m} એ a^mનો વ્યસ્ત છે.

પ્રયત્ન કરો

નિમ્નલિખિત સંખ્યાના વ્યસ્ત શોધો.

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

આપણે 1425 જેવી સંખ્યાને વિસ્તૃત ઘાત સ્વરૂપે લખતાં શીખ્યા છીએ.
જેમ કે, $1425 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
ચાલો, હવે આપણે 1425.36ને વિસ્તૃત સ્વરૂપે કેવી રીતે દર્શાવાય તે જોઈએ.

અહીં, $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓને વિસ્તૃત સ્વરૂપે લખો.

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

10.3 ઘાતાંકના નિયમો (a s o onents)

97HC2F

આપણે જાણીએ છીએ કે, કોઈપણ શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ જ્યાં, m અને n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે. શું આ નિયમ ઋણ ઘાતાંક માટે પણ લાગુ પડશે ? ચાલો સમજીએ.

(i) આપણે જાણીએ છીએ કે

કોઈપણ શૂન્યેત્તર સંખ્યા a માટે $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ અને $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

માટે $2^{-3} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2} = \frac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

બે ઘાતાંક –3 અને –2નો સરવાળો –5 છે.

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ લેતાં,

$$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3}$$

$$= \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) હવે $5^{-2} \times 5^4$ માટે

$(-2) + 4 = 2$

$$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2$$

ધોરણ 7 માં તમે અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છો કે કોઈપણ શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ જ્યાં m અને n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે અને $m > n$

(iv) હવે, $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ માટે,

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{-2}$$

$(-4) + 2 = -2$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે કોઈપણ શૂન્યેત્તર સંખ્યા a માટે,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, જ્યાં m અને n પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

પ્રયત્ન કરો

સાદું રૂપ આપી અને ઘાત સ્વરૂપે લખો.

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

આ જ પ્રમાણે તમે નીચે દર્શાવેલ ઘાતાંકના નિયમો ચકાસી શકો છો, જ્યાં a અને b શૂન્યેત્તર પૂર્ણાંક હોય તથા m અને n કોઈપણ પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય.

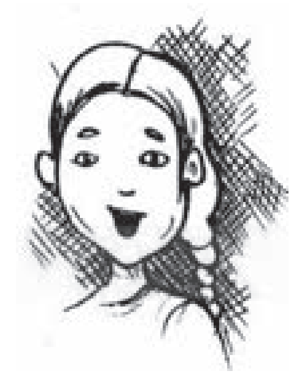
(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

ધન ઘાતાંક માટે આ નિયમો આપણે ધોરણ 7માં શીખી ચૂક્યા છીએ.

ચાલો, હવે આપણે ઉપરના નિયમોનો ઉપયોગ કરીને થોડાંક ઉદાહરણના ઉકેલ મેળવીએ.

ઉદાહરણ 1 : કિંમત શોધો.



(i) 2^{-3} (ii) $\frac{1}{3^{-2}}$

ઉકેલ :

(i) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

ઉદાહરણ 2 : સાદું રૂપ આપો.

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

ઉકેલ :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \frac{1}{(-4)^5}$ $\left(a^m \times a^n = a^{m+n},\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ $(a^m \div a^n = a^{m-n})$

ઉદાહરણ 3 : 4^{-3}ને આધાર 2 હોય તેવા ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં, $4 = 2 \times 2 = 2^2$

માટે $4^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{2 \times (-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

ઉદાહરણ 4 : સાદુંરૂપ આપો અને જવાબને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

ઉકેલ :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \frac{1}{100^3}$

$\left[a^m \times b^m = (ab)^m,\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right.$ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં]

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

ઉદાહરણ 5 : જો $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$ હોય તો m શોધો.

ઉકેલ : $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$\therefore (-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$\therefore (-3)^{m+6} = (-3)^7$

બંને તરફના ઘાત સ્વરૂપનો આધાર સમાન છે. જે 1 અને -1થી ભિન્ન છે. તેથી તેમના ઘાતાંક પણ સમાન થાય.

માટે, $m + 6 = 7$

$m = 7 - 6 = 1$

જો $n = 0$ હોય તો જ $a^n = 1$ થાય. જે a ની કોઈપણ કિંમત માટે સત્ય છે, $a = 1$ માટે, $1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{-2} = \ldots = 1$
અથવા
અનંત સંખ્યા n માટે $(1)^n = 1$.
$a = -1$ માટે $(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = \ldots = 1$
અથવા કોઈપણ યુગ્મ સંખ્યા p માટે $(-1)^p = 1$.

ઉદાહરણ 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

સામાન્ય રીતે, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

ઉદાહરણ 7 : સાદું રૂપ આપો. (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left\{\frac{1}{4}\right\}^{-2}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

ઉકેલ :

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left\{\frac{1}{4}\right\}^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$

$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2}$

$= \{9 - 8\} \div 16 = \frac{1}{16}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$

$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$

સ્વાધ્યાય 10.1

1. કિંમત શોધો.

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

2. સાદું રૂપ આપો અને પરિણામને ધન ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$ (iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

(iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

3. કિંમત શોધો.

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1})^0$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^2$

4. કિંમત શોધો.

(i) $\dfrac{8^{-1} \times 5^3}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1} \times 2^{-1}) \times 6^{-1}$

5. જો $5^m \div 5^{-3} = 5^5$ હોય, તો m શોધો.

6. કિંમત શોધો.

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

7. સાદું રૂપ આપો.

(i) $\dfrac{25 \times t^{-4}}{5^{-3} \times 10 \times t^{-8}}$ $(t \neq 0)$ (ii) $\dfrac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 125}{5^{-7} \times 6^{-5}}$

10.4 નાની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવવામાં ઘાતાંકનો ઉપયોગ

નીચેનાં તથ્યોનું અવલોકન કરો.

1. પૃથ્વીનું સૂર્યથી અંતર 149,600,000,000 મી. છે.
2. પ્રકાશની ઝડપ 300,000,000 મી/સે છે.
3. ધોરણ 7ના ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકની જાડાઈ 20 મીમી છે.
4. રક્તકણોનો સરેરાશ વ્યાસ 0.000007 મી છે.
5. મનુષ્યના વાળની જાડાઈ 0.005 સેમીથી 0.01 સેમીની વચ્ચે હોય છે.
6. પૃથ્વીથી ચંદ્રનું અંતર આશરે 384,467,000 મી છે.
7. વનસ્પતિ કોષનું માપ 0.00001275 મી છે.
8. સૂર્યની સરેરાશ ત્રિજ્યા 695000 કિમી છે.
9. અંતરિક્ષ યાનમાં રહેલા બૂસ્ટર રોકેટમાં ઘન બળતણનું દ્રવ્યમાન 503600 કિગ્રા છે.
10. કાગળના ટુકડાની જાડાઈ 0.0016 સેમી છે.
11. કમ્પ્યૂટર ચિપના એક તારનો વ્યાસ 0.000003 સેમી છે.
12. માઉન્ટ ઍવરેસ્ટની ઊંચાઈ 8848 મી છે.

આપણે જોઈશું કે અહીં બહુ જ ઓછી સંખ્યાઓ છે જેને આપણે વાંચી શકીશું જેવી કે, 2 સેમી, 8848 મી, 6,95,000 કિમી. અહીં 150,000,000,000 મી જેવી બહુ જ મોટી સંખ્યાઓ છે તેમજ 0.000007 મી જેવી બહુ જ નાની સંખ્યાઓ છે. ઉપરોક્ત વિધાનોમાંથી આવી બહુ જ મોટી અને બહુ જ નાની સંખ્યાઓ શોધો અને આપેલ કોષ્ટકમાં લખો.

બહુ જ મોટી સંખ્યા	બહુ જ નાની સંખ્યા
150,000,000,000 મી	0.000007 મી
----------------	----------------
----------------	----------------
----------------	----------------
----------------	----------------

આગળના ધોરણમાં આપણે શીખ્યા છીએ કે બહુ જ મોટી સંખ્યાઓને તેમના પ્રમાણિત સ્વરૂપે કેવી રીતે દર્શાવી શકાય.

દા.ત. $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

હવે, આપણે 0.000007 મી ને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવીએ.

$0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$

$\therefore$ 0.000007 મી = 7×10^{-6} મી

આ જ રીતે, એક કાગળના ટુકડાની જાડાઈ 0.0016 સેમી છે.

તેથી $0.0016 = \frac{16}{10000}$

$= \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$

$= 1.6 \times 10^{-3}$

માટે કાગળની જાડાઈ 1.6×10^{-3} સેમી છે.

1 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
. દશાંશચિહ્ન 11 એકમ ડાબી બાજુ જશે

0.0 0 0 0 0 7
1 2 3 4 5 6
દશાંશચિહ્ન 6 એકમ જમણી બાજુ જશે.

0.0 0 1 6
1 2 3
દશાંશચિહ્ન 3 સ્થાન જમણી બાજુ જશે.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવો.
   (i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000
2. આગળ આપેલ તથ્યોમાં દર્શાવેલ સંખ્યાને તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપે લખો.

10.4.1 બહુ જ મોટી તથા બહુ જ નાની સંખ્યાઓની સરખામણી

સૂર્યનો વ્યાસ 1.4×10^9 મી અને પૃથ્વીનો વ્યાસ 1.2756×10^7 મી છે. ધારો કે તમે પૃથ્વીના વ્યાસની તુલના સૂર્યના વ્યાસ સાથે કરવા માગો છો.

સૂર્યનો વ્યાસ = 1.4×10^9 મી

પૃથ્વીનો વ્યાસ = 1.2756×10^7 મી

માટે, $\frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \frac{1.4 \times 100}{1.2756}$ જે લગભગ 100 થશે.

તેથી, સૂર્યનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસ કરતાં 100 ગણો છે.

ચાલો, હવે 0.000007 મી માપ ધરાવતાં રક્તકણોની તુલના 0.00001275 મી માપ ધરાવતાં વનસ્પતિકોષ સાથે કરીએ.

રક્તકણનું માપ = 0.000007 મી = 7×10^{-6} મી

વનસ્પતિકોષનું માપ = 0.00001275 મી = 1.275×10^{-5} મી

માટે, $\frac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \frac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \frac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \frac{0.7}{1.275} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{1}{2}$ (આશરે)

તેથી, રક્તકણનું કદ વનસ્પતિકોષના કદ કરતાં અડધું છે.

પૃથ્વીનું દ્રવ્યમાન 5.97×10^{24} કિગ્રા અને ચંદ્રનું દ્રવ્યમાન 7.35×10^{22} કિગ્રા છે, તો કુલ દ્રવ્યમાન કેટલું હશે ?

કુલ દ્રવ્યમાન = 5.97×10^{24} કિગ્રા + 7.35×10^{22} કિગ્રા

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$

$= 604.35 \times 10^{22}$ કિગ્રા

પ્રમાણિત સ્વરૂપે રહેલી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતી વખતે, સૌપ્રથમ તેમને સમાન ઘાતાંકવાળી સંખ્યામાં ફેરવીશું.

સૂર્ય અને પૂથ્વી વચ્ચેનું અંતર 1.496×10^{11} મી તથા પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર 3.84×10^8 મી છે. સૂર્યગ્રહણ વખતે ચંદ્ર પૃથ્વી અને સૂર્યની વચ્ચે આવે છે. આ સમયે ચંદ્રનું સૂર્યથી અંતર કેટલું હશે ?

$$\begin{aligned}
\text{સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર} &= 1.496 \times 10^{11} \text{ મી} \\
\text{પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર} &= 3.84 \times 10^{8} \text{ મી} \\
\text{સૂર્ય અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર} &= 1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8} \\
&= 1.496 \times 1000 \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8} \\
&= (1{,}496 - 3.84) \times 10^{8} \text{ મી} = 1492.16 \times 10^{8} \text{ મી}
\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 8 : નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) 0.000035 (ii) 4050000

ઉકેલ :

(i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^{6}$

ઉદાહરણ 9 : નીચેની સંખ્યાઓને સામાન્ય સ્વરૂપે લખો.

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

ઉકેલ :

(i) $3.52 \times 10^{5} = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \dfrac{7.54}{10^{4}} = \dfrac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \dfrac{3}{10^{5}} = \dfrac{3}{100000} = 0.00003$

ફરીથી આપણે પ્રમાણિત સ્વરૂપે આપેલી સંખ્યાઓને સમાન ઘાતાંક વાળી સંખ્યામાં બદલવી પડશે.

સ્વાધ્યાય 10.2

1. નીચેની સંખ્યાઓને તેમનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942

(iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837

(v) 31860000000

2. નીચેની સંખ્યાઓને તેમનાં સામાન્ય સ્વરૂપે લખો.

(i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}

(iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}

3. નીચે આપેલાં વિધાનોમાં દર્શાવેલ સંખ્યાને તેમનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપે લખો.

(i) 1 માઈક્રોન બરાબર $\dfrac{1}{1000000}$ મી થાય.

(ii) એક ઈલેક્ટ્રોનનો વીજભાર 0.000,000,000,000,000,000,16 કુલંબ છે.

(iii) બૅક્ટેરિયાનું માપ 0.0000005 મી છે.

(iv) વનસ્પતિકોષનું માપ 0.00001275 મી છે.

(v) એક જાડા કાગળની જાડાઈ 0.07 મિમી છે.

4. એક થપ્પીમાં 20 મિમી જાડાઈ હોય તેવી 5 ચોપડી અને 0.016 મિમી જાડાઈના 5 કાગળ ગોઠવેલા છે, તો થપ્પીની કુલ ઊંચાઈ શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. ઋણ ઘાતાંક ધરાવતી સંખ્યાઓને પણ નીચેના નિયમો લાગુ પડે છે.

(a) $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$ (b) $a^{m} \div a^{n} = a^{m-n}$ (c) $(a^{m})^{n} = a^{mn}$

(d) $a^{m} \times b^{m} = (ab)^{m}$ (e) $a^{0} = 1$ (f) $\dfrac{a^{m}}{b^{m}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{m}$

2. બહુ જ નાની સંખ્યાઓને ઋણ ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીને પ્રમાણિત સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.

પ્રકરણ 11

સમપ્રમાણ અને વ્યસ્ત પ્રમાણ

GVB2LB

11.1 પ્રાસ્તાવિક

મોહન પોતાના માટે અને પોતાની બહેન માટે ચા બનાવે છે. આ માટે તે 300 મિલીલિટર પાણી, 2 ચમચી ખાંડ, 1 ચમચી ચાની ભૂકી અને 50 મિલીલિટર દૂધનો ઉપયોગ કરે છે. હવે જો તેને પાંચ વ્યક્તિઓ માટે ચા બનાવવી હોય તો, ઉપરોક્ત વસ્તુઓનો કેટલો જથ્થો જોઈશે ?

જો બે વિદ્યાર્થીઓને કોઈ એક સભામાં ખુરશીઓ ગોઠવવામાં 20 મિનિટનો સમય લાગે તો આ જ કામ પાંચ વિદ્યાર્થીઓ કેટલા સમયમાં કરી શકે ?

દૈનિક જીવનમાં આપણે આવી ઘણી બધી પરિસ્થિતિઓનો સામનો કરતાં હોઈએ છીએ જેમાં, આપણે જોઈએ છીએ કે કોઈ એક રાશિમાં થતાં પરિવર્તનને કારણે અન્ય રાશિમાં પણ પરિવર્તન આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) જો ખરીદેલી વસ્તુની સંખ્યામાં વધારો થાય તો તેની કુલ ખરીદ કિંમતમાં પણ વધારો થાય છે.

(ii) બૅંકમાં વધારે રકમ જમા કરાવીએ તો વધારે વ્યાજ મેળવી શકાય.

(iii) જો વાહનની ઝડપમાં વધારો થાય તો અંતર કાપવા માટે લાગતાં સમયમાં ઘટાડો થાય છે.

(iv) કોઈ એક કાર્ય માટે, કારીગરની સંખ્યા વધે તો કાર્ય પૂરું કરવા લાગતો સમય ઘટે.

ધ્યાન રાખો, અહીં એક રાશિમાં થતાં પરિવર્તનને કારણે બીજી રાશિમાં પરિવર્તન થાય છે.

આવી બીજી પાંચ પરિસ્થિતિઓ લખો કે જેમાં એક રાશિમાં થતાં પરિવર્તનને કારણે અન્ય રાશિમાં પણ પરિવર્તન આવે છે.

મોહનને જોઈતી વસ્તુઓનો જથ્થો આપણે કેવી રીતે શોધીશું ? અથવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા કાર્યને પુરું કરવા માટે લાગતાં સમયને કેવી રીતે શોધીશું ?

આ પ્રકારના પ્રશ્નોના જવાબ આપવા માટે આપણે ચલન (variation)ના મહત્ત્વના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

11.2 સમપ્રમાણ (irect Pro ortion)

97H843

જો 1 કિગ્રા ખાંડની કિંમત ₹ 36 હોય, તો 3 કિગ્રા ખાંડની કિંમત કેટલી હશે ? તે ₹ 108 થાય.

આ જ પ્રકારે, આપણે 5 કિગ્રા તથા 8 કિગ્રા ખાંડની કિંમત શોધી શકીશું. નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો.

ખાંડનું વજન (કિગ્રામાં)	1	3	5	6	8	10
કિંમત (રૂપિયામાં)	36	108	180	...	...	...

ધ્યાન આપો, અહીં ખાંડના જથ્થામાં વધારો થતાં તેની કિંમતમાં પણ એવી રીતે વધારો થાય છે કે જેથી તેનો ગુણોત્તર અચળ રહે.

બીજું એક ઉદાહરણ લઈએ. ધારો કે એક કાર 60 કિમી અંતર કાપવા માટે 4 લિટર પેટ્રોલ વાપરે છે તો 12 લિટર પેટ્રોલમાં તે કેટલું અંતર કાપશે ? જવાબ 180 કિમી આવશે. આ અંતર કેવી રીતે શોધીશું ?

અહીં આપેલ પરિસ્થિતિમાં 12 લિટર પેટ્રોલ એટલે કે 4 લિટરનું ત્રણ ગણું પેટ્રોલ વપરાય છે. તેથી કાપેલું અંતર પણ 60 કિમીનું ત્રણ ગણું થશે. એટલે કે પેટ્રોલનો વપરાશ ત્રણ ગણો વધારે થાય તો કાપેલું અંતર પણ અગાઉના અંતર કરતાં ત્રણ ગણું થશે. હવે, ધારો કે પેટ્રોલનો વપરાશ x લિટર અને તેને અનુરૂપ કાપેલું અંતર y કિમી છે. હવે, નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

પેટ્રોલ લિટરમાં (x)	4	8	12	15	20	25
અંતર કિમીમાં (y)	60	...	180	...	...	...

અહીં આપણે જોઈશું કે xના મૂલ્યમાં વધારો થાય છે ત્યારે yના મૂલ્યમાં પણ એવી રીતે વધારો થાય છે કે જેથી ગુણોત્તર $\frac{x}{y}$માં કોઈ ફેરફાર ન થાય. એટલે કે તે અચળ રહે. (ધારો કે k) આ સ્થિતિમાં અચળાંક $\frac{1}{15}$ છે.

(જાતે ચકાસો !)

આમ, આપણે કહી શકીએ કે જો $\frac{x}{y} = k$ અથવા $x = ky$ હોય તો x એ y ના સમપ્રમાણમાં છે.

આ ઉદાહરણમાં, $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ છે, જ્યાં 4 અને 12 વપરાયેલા પેટ્રોલનો જથ્થો (x) લિટરમાં છે તથા 60 અને 180 એ કપાયેલ અંતર (y) કિમીમાં છે. આમ, જો x અને y સમપ્રમાણમાં હોય, તો આપણે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ લખી શકીએ. (જ્યાં xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2 ને અનુરૂપ yનાં મૂલ્યો અનુક્રમે y_1 અને y_2 છે.)

પેટ્રોલનો વપરાશ અને કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર એક સમપ્રમાણની સ્થિતિ બતાવે છે. આ જ પ્રમાણે કુલ ખર્ચેલ રકમ અને ખરીદેલ વસ્તુઓની સંખ્યા પણ સમપ્રમાણનું એક ઉદાહરણ છે.

સમપ્રમાણનાં થોડાંક વધારે ઉદાહરણો વિશે વિચારો. શરૂઆતના ઉદાહરણમાં પાંચ વ્યક્તિઓ માટે ચા બનાવવા માટે મોહન 750 મિલીલિટર પાણી, 5 ચમચી ખાંડ, $2\frac{1}{2}$ ચમચી ચાની ભૂકી અને 125 મિલી-લિટર દૂધનો ઉપયોગ કરશે. ચાલો સમપ્રમાણના આ મુદ્દાને નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

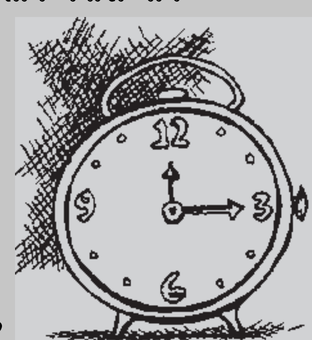
આટલું કરો

(i) • એક ઘડિયાળ લો અને તેના મિનિટ કાંટાને 12 પર ગોઠવો.

• મિનિટ કાંટાએ તેની પ્રારંભિક સ્થિતિ સાથે બનાવેલ ખૂણા તથા વીતેલા સમયને નીચેના કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો.

વિતેલો સમય મિનિટમાં (T)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
બનાવેલ ખૂણો (ડિગ્રીમાં) (A) લિટર	(A_1) 90°	(A_2) ...	(A_3) ...	(A_4) ...
$\frac{T}{A}$	...	...	...	...

તમને T અને Aના અવલોકન દ્વારા શું જાણવા મળ્યું ? શું બંનેમાં એક સાથે વધારો થાય છે ? શું $\frac{T}{A}$ દરેક વખતે સમાન હોય છે ?



શું મિનિટ કાંટાએ બનાવેલ ખૂણો વિતેલા સમયના સમપ્રમાણમાં છે ?
હા. ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં તમે જોઈ શકો છો કે,

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$ કારણ કે

$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1 : 2$

$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1 : 2$

ચકાસો $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ અને $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$ થાય છે ?

હવે તમે પોતાની રીતે સમયગાળો નક્કી કરી અને ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિ ફરીથી કરી શકો છો.

(ii) તમારા મિત્રને નીચેનું કોષ્ટક ભરવાનું કહો તથા તેની ઉંમરને અનુરૂપ તેની માતાની ઉંમરનો ગુણોત્તર શોધવાનું પણ કહો.

	પાંચ વર્ષ પહેલાની ઉંમર	**હાલની ઉંમર**	**પાંચ વર્ષ પછીની ઉંમર**
મિત્રની ઉંમર (F)			
માતાની ઉંમર (M)			
$\frac{F}{M}$			

તમે શું અવલોકન કર્યું ? શું F અને Mમાં એકસાથે વધારો (અથવા ઘટાડો) થાય છે ? શું $\frac{F}{M}$ નું મૂલ્ય દરેક વખતે સમાન છે ? ના. આ પ્રવૃત્તિને તમે તમારા અન્ય મિત્રો સાથે ફરીથી કરો અને અવલોકનો નોંધો.

આમ, એક સાથે વધતાં (અથવા ઘટતા) ચલ હંમેશા સમપ્રમાણમાં જ હોય તે જરૂરી નથી. ઉદાહરણ તરીકે :

(i) સમયની સાથે મનુષ્યમાં શારીરિક ફેરફારો થાય છે પરંતુ તે જરૂરી નથી કે તે પૂર્વનિર્ધારિત ગુણોત્તરમાં જ હોય.

(ii) મનુષ્યના વજન અને ઊંચાઈમાં થતાં ફેરફારો કોઈ નિશ્ચિત પ્રમાણમાં નથી હોતા.

(iii) કોઈ વૃક્ષની ઊંચાઈ અને તેની ડાળીઓ પર રહેલા પાનાની સંખ્યા વચ્ચે કોઈ સીધો સંબંધ નથી આવાં બીજાં ઉદાહરણો વિશે વિચારો.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેનાં કોષ્ટકનું અવલોકન કરો અને જણાવો કે x અને y સમપ્રમાણમાં છે કે નહીં.

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. મુદલ = ₹ 1000, વ્યાજનો દર = વાર્ષિક 8% માટે નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક પૂર્ણ કરો અને ચકાસો કે આ પ્રકારનું વ્યાજ (સાદું અથવા ચક્રવૃદ્ધિ) આપેલ સમયના સમપ્રમાણમાં છે.

$\frac{P \times r \times t}{100}$

$P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - P$

આપેલ સમયગાળો	1 વર્ષ	2 વર્ષ	3 વર્ષ
સાદુ વ્યાજ (₹માં)			
ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ (₹માં)			

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો આપણે સમયગાળો તથા વ્યાજનો દર નિશ્ચિત રાખીએ તો સાદું વ્યાજ તેના મુદલના સમપ્રમાણમાં હોય છે, શું આ જ સંબંધ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ માટે પણ સત્ય છે ? કેમ ?

ચાલો, હવે થોડાંક એવાં ઉદાહરણોના ઉકેલ મેળવીએ જેમાં સમપ્રમાણના મુદ્દાનો ઉપયોગ થતો હોય.

ઉદાહરણ 1 : એક વિશેષ પ્રકારના 5 મીટર કાપડની કિંમત ₹ 210 છે. તો આ પ્રકારના 2, 4, 10 અને 13 મીટર કાપડની કિંમત માટે કોષ્ટક બનાવો.

ઉકેલ : ધારો કે કાપડની લંબાઈ x મીટર છે અને તેની કિંમત ₹ y છે.

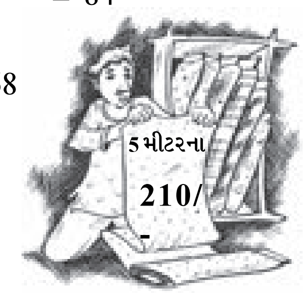
x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

હવે જેમ કાપડની લંબાઈમાં વધારો થાય તેમ કાપડની કિંમત પણ તે જ ગુણોત્તરમાં વધે છે. આ એક સમપ્રમાણની સ્થિતિ છે.

આપણે અહીં $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ પ્રકારના સંબંધનો ઉપયોગ કરીએ.

(i) અહીં $x_1 = 5$, $y_1 = 210$ અને $x_2 = 2$

માટે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ એટલે $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ અથવા $5y_2 = 2 \times 210$, $\therefore y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$



(ii) જો $x_3 = 4$ હોય તો $\frac{5}{210} = \frac{4}{y_3}$, $\therefore 5y_3 = 4 \times 210$, $\therefore y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

[અહીં $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ નો ઉપયોગ કરી શકાય ? પ્રયત્ન કરો.]

(iii) જો $x_4 = 10$ હોય તો $\frac{5}{210} = \frac{10}{y_4}$, $\therefore y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) જો $x_5 = 13$ હોય તો $\frac{5}{210} = \frac{13}{y_5}$, $\therefore y_5 = \frac{13 \times 210}{5} = 546$

[ધ્યાન આપો, અહીં આપણે $\frac{5}{210}$ ની જગ્યાએ $\frac{2}{84}$ અથવા $\frac{4}{168}$ અથવા $\frac{10}{420}$ નો પણ ઉપયોગ કરી શકીએ.]

ઉદાહરણ 2 : 14 મીટર ઊંચાઈ ધરાવતા વિજળીના એક થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ 10 મીટર છે. આ જ પરિસ્થિતિમાં એક વૃક્ષના પડછાયાની લંબાઈ 15 મીટર હોય, તો વૃક્ષની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વૃક્ષની ઊંચાઈ x મીટર છે. હવે નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવતાં,

પદાર્થની ઊંચાઈ (મીટરમાં)	14	x
પડછાયાની લંબાઈ (મીટરમાં)	10	15

ધ્યાન આપો, પદાર્થની ઊંચાઈ જેટલી વધારે, તેટલી જ તેના પડછાયાની લંબાઈ વધારે હશે. આથી આ એક સમપ્રમાણની સ્થિતિ છે. અર્થાત્ $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ લેતાં,

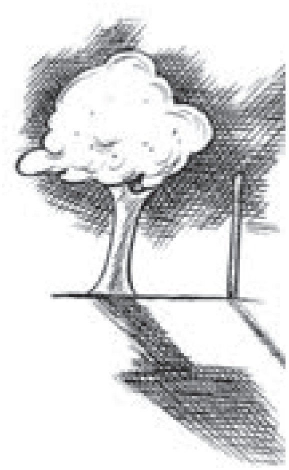
આપણને $\frac{14}{10} = \frac{x}{15}$ મળે. (કેમ ?)

$\therefore \quad \frac{14}{10} \times 15 = x$

$\therefore \quad \frac{14 \times 3}{2} = x$

તેથી $\quad 21 = x$

આમ, વૃક્ષની ઊંચાઈ 21 મીટર છે.



આપણે $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ને $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ તરીકે પણ દર્શાવી શકીએ.

એટલે કે, $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$

$\therefore \quad 14 : x = 10 : 15$

માટે $\quad 10 \times x = 15 \times 14$

$\therefore \quad x = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

ઉદાહરણ 3 : જો 12 જાડા કાગળનું વજન 40 ગ્રામ હોય, તો આ જ પ્રકારના કેટલા કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિલોગ્રામ થાય ?

ઉકેલ : ધારો કે x સંખ્યાના કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિગ્રા થાય છે. ઉપરોક્ત માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

કાગળની સંખ્યા	12	x
કાગળનું વજન (ગ્રામમાં)	40	2500

1 કિલોગ્રામ = 1000 ગ્રામ

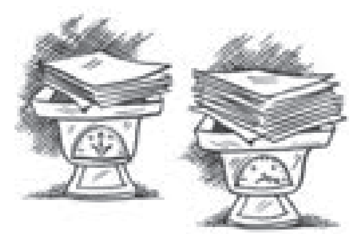
$2\frac{1}{2}$ કિલોગ્રામ = 2500 ગ્રામ

કાગળની સંખ્યા વધારે હશે તો તેનું વજન પણ વધશે. તેથી કાગળની સંખ્યા તેના વજનના સમપ્રમાણમાં છે.

તેથી, $\frac{12}{40} = \frac{x}{2500}$

$\therefore \quad \frac{12 \times 2500}{40} = x$

$\therefore \quad 750 = x$



આમ, માંગેલ કાગળની સંખ્યા = 750

બીજી રીત : બે રાશિઓ x અને y એકબીજાના સમપ્રમાણમાં રહેલ છે. તેથી $x = ky$ અથવા $\frac{x}{y} = k$

અહીં, $k = \frac{\text{કાગળની સંખ્યા}}{\text{કાગળનું ગ્રામમાં વજન}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

હવે જો x સંખ્યાના કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિગ્રા (2500 ગ્રામ) હોય તો,

$x = ky$નો ઉપયોગ કરતાં, $x = \frac{3}{10} \times 2500 = 750$

આમ, 750 કાગળનું વજન $2\frac{1}{2}$ કિગ્રા હશે.

ઉદાહરણ 4 : એક રેલગાડી, 75 કિમી/કલાકની અચળ ઝડપે ગતિ કરે છે. તો,

(i) 20 મિનિટમાં કેટલું અંતર કાપશે ?

(ii) 250 કિલોમીટર અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે રેલગાડીએ 20 મિનિટમાં કાપેલ અંતર x કિમી છે અને 250 કિમી માટે લાગતો સમય (મિનિટમાં) y છે.

1 કલાક = 60 મિનિટ

કાપેલ અંતર (કિમીમાં)	75	x	250
સમય (મિનિટમાં)	60	20	y

અહીં ઝડપ અચળ છે, તેથી કાપેલું અંતર સમયના સમપ્રમાણમાં હશે.

(i) અહીં, $\frac{75}{60} = \frac{x}{20}$

$\therefore \frac{75 \times 20}{60} = x$

$\therefore x = 25$

તેથી, રેલગાડી 20 મિનિટમાં 25 કિમીનું અંતર કાપશે.

(ii) અને $\frac{75}{60} = \frac{250}{y}$

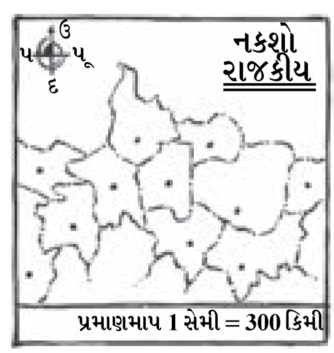
$\therefore y = \frac{250 \times 60}{75} = 200$ મિનિટ અથવા 3 કલાક અને 20 મિનિટ

આમ, 250 કિમી અંતર કાપતાં લાગતો સમય 3 કલાક અને 20 મિનિટ છે. વૈકલ્પિક રીતે, જો તમે x જાણતા હોય તો $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ પરથી તમે yને શોધી શકો છો.

> તમે જાણો છો કે ભૌગોલિક નકશો એક મોટા પ્રદેશનું લઘુ સ્વરૂપ છે. નકશાના નીચેના ભાગમાં પ્રમાણમાપ (સ્કેલ) આપેલ હોય છે. આ પ્રમાણમાપ વાસ્તવિક લંબાઈ અને નકશામાં દર્શાવેલ લંબાઈ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. આમ, પ્રમાણમાપ નકશાના બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર અને વાસ્તવિક અંતર વચ્ચેનો ગુણોત્તર છે.
>
> ઉદાહરણ તરીકે, નકશા પરનું 1 સેમી અંતર વાસ્તવિક અંતર 8 કિમી દર્શાવતું હોય (એટલે કે પ્રમાણમાપ 1 સેમી : 8 કિમી અથવા 1 : 8,00,000) તો નકશા પરનું 2 સેમીનું માપ 16 કિમી દર્શાવશે. આથી આપણે કહી શકીએ કે નકશા પર દર્શાવેલ પ્રમાણમાપ, સમપ્રમાણતાને આધારિત છે.

ઉદાહરણ 5 : નકશામાં પ્રદર્શિત પ્રમાણમાપ 1 : 30000000 છે. નકશામાં બે શહેર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી હોય, તો વાસ્તવિક અંતર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે નકશા પરનું અંતર x સેમી અને વાસ્તવિક અંતર y સેમી છે.



માટે $1 : 30000000 = x : y$

$\therefore \frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{x}{y}$

પરંતુ $x = 4$ છે. તેથી, $\frac{1}{3 \times 10^7} = \frac{4}{y}$

$\therefore y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ સેમી $= 1200$ કિમી

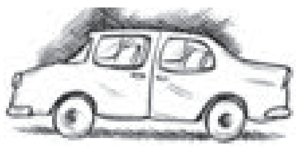
આમ, નકશામાં 4 સેમીના અંતરે આવેલા બે શહેર વાસ્તવિક રૂપે એકબીજાથી 1200 કિમીના અંતરે આવેલ છે.

આટલું કરો

તમારા રાજ્યનો ભૌગોલિક નકશો લો. તેમાં આપેલ પ્રમાણમાપની નોંધ કરો. હવે ફૂટપટ્ટીની મદદથી નકશામાં દર્શાવેલ બે શહેર વચ્ચેનું અંતર માપો. હવે તેમનું વાસ્તવિક અંતર શોધો.

સ્વાધ્યાય 11.1

1. એક રેલવે સ્ટેશન પર કાર પાર્કિંગનો દર નીચે પ્રમાણે છે :



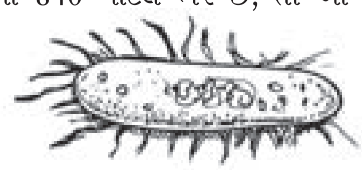
4 કલાક	₹ 60
8 કલાક	₹ 100
12 કલાક	₹ 140
24 કલાક	₹ 180

ઉપરોક્ત પાર્કિંગના દર તેમને અનુરૂપ સમય સાથે સમપ્રમાણમાં છે કે નહીં તે ચકાસો.

2. એક રંગના મૂળ મિશ્રણના 8 ભાગમાં, 1 ભાગ લાલ રંગ મેળવીને મિશ્રણ તૈયાર કરેલ છે. નીચેના કોષ્ટકમાં મૂળ મિશ્રણનો ભાગ શોધો.

લાલ રંગ	1	4	7	12	20
મૂળ મિશ્રણ	8	-	-	-	-

3. પ્રશ્ન 2માં, જો લાલ રંગના પદાર્થના 1 ભાગ માટે 75 મિલીલિટર મૂળ મિશ્રણ જોઈએ તો 1800 મિલીલિટર મૂળ મિશ્રણ માટે કેટલા ભાગનો લાલ રંગનો પદાર્થ જોઈશે ?
4. ઠંડાં પીણાં બનાવતી એક ફેક્ટરીમાં, એક યંત્ર 6 કલાકમાં 840 બૉટલ ભરે છે, તો આ યંત્ર 5 કલાકમાં કેટલી બૉટલ ભરશે ?



5. એક જીવાણું(bacteria)ના ચિત્રને 50,000 ગણું મોટું કરતાં તેની લંબાઈ 5 સેમી થાય છે. જે આકૃતિમાં બતાવેલ છે. તો આ જીવાણુની વાસ્તવિક લંબાઈ કેટલી હશે ? હવે જો ચિત્રને 20,000 ગણું કરવામાં આવે તો તેની લંબાઈ શોધો.

6. એક વહાણની પ્રતિકૃતિમાં તેના કૂવાથંભની ઊંચાઈ 9 સેમી છે અને વાસ્તવિક વહાણમાં તેની ઊંચાઈ 12 મીટર છે. હવે જો વહાણની લંબાઈ 28 મીટર હોય, તો તેની પ્રતિકૃતિની લંબાઈ શોધો.
7. જો 2 કિગ્રા ખાંડમાં રહેલા સ્ફટિકોની સંખ્યા 9×10^6 છે, તો નીચે દર્શાવેલ જથ્થામાં કેટલા સ્ફટિકો હશે ? (i) 5 કિગ્રા(ii) 1.2 કિગ્રા
8. રશ્મિ પાસે, 1 સેમી બરાબર 18 કિમી પ્રમાણમાપ ધરાવતો એક સડક માર્ગનો નકશો છે. હવે જો તે આ સડક પર 72 કિમીનું અંતર કાપે છે, તો તેના દ્વારા કાપેલ અંતર નકશામાં કેટલું દર્શાવ્યું હોય ?
9. એક 5 મીટર અને 60 સેમી ઊંચા શિરોલંબ થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ 3 મીટર 20 સેમી છે. આ જ સમયે (i) 10 મીટર 50 સેમી ઊંચા થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ શોધો. (ii) 5 મીટર લંબાઈનો પડછાયો હોય તેવા થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો.
10. એક ભારવાહક ખટારો 25 મિનિટમાં 14 કિમી અંતર કાપે છે. આ જ ઝડપે ગતિ કરે તો 5 કલાકમાં કેટલું અંતર કાપશે ?

આટલું કરો

1. એક ચોરસ પેપર ઉપર અલગ-અલગ લંબાઈના પાંચ ચોરસ દોરો. નીચેની માહિતી કોષ્ટકમાં લખો :

	ચોરસ-1	ચોરસ-2	ચોરસ-3	ચોરસ-4	ચોરસ-5
બાજુની લંબાઈ (L)					
પરિમિતિ (P)					
$\frac{L}{P}$					

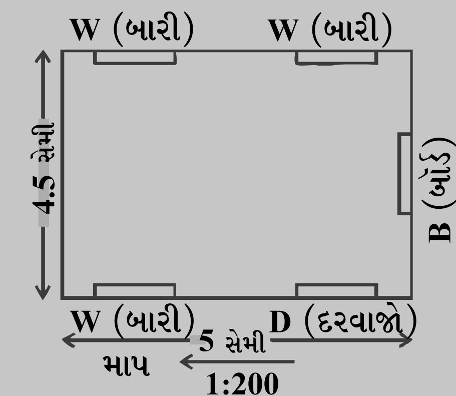
ક્ષેત્રફળ (A)					
$\frac{L}{A}$					

શોધવાનો પ્રયત્ન કરો કે, તેની બાજુની લંબાઈ

(a) ચોરસની પરિમિતિના સમપ્રમાણમાં છે.

(b) ચોરસના ક્ષેત્રફળના સમપ્રમાણમાં છે.

2. પાંચ વ્યક્તિઓ માટે શીરો બનાવવા નીચેની સામગ્રીની જરૂરિયાત છે.
   સોજી/રવો = 250 ગ્રામ, ખાંડ = 300 ગ્રામ,
   ઘી = 200 ગ્રામ, પાણી = 500 મિલી.
   સમપ્રમાણના પરિણામનો ઉપયોગ કરીને તમારા વર્ગનાં બધાં જ બાળકો માટે શીરો બનાવવા કેટલી સામગ્રી જોઈશે તે શોધો.
3. કોઈ એક પ્રમાણમાપ નક્કી કરીને તમારા વર્ગખંડનો એક નકશો બનાવો જેમાં બારી, બારણાં, કાળું પાટિયું વગેરે દર્શાવેલ હોય. (ઉદાહરણ આપેલ છે.)



વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

અત્યાર સુધી ચર્ચામાં લીધેલ સમપ્રમાણના ઉદાહરણો પૈકી થોડાક ઉદાહરણો લો અને વિચારો કે આ ઉદાહરણનો ઉકેલ એકમ પદ્ધતિ દ્વારા મળી શકે ?

11.3 વ્યસ્ત પ્રમાણ (n erse Pro ortion)

બે રાશિઓ નીચે પ્રમાણે પણ પરિવર્તિત થઈ શકે છે. જેમ કે, એક રાશિમાં વધારો થાય તો તેને અનુરૂપ બીજી રાશિમાં ઘટાડો થાય અથવા તો એક રાશિમાં ઘટાડો થાય તો તેને અનુરૂપ બીજી રાશિમાં વધારો થાય. ઉદાહરણ તરીકે એક કામ પૂરું કરવા માટે કારીગરની સંખ્યામાં વધારો થાય તો કામ પૂરું કરવા માટે લાગતા સમયમાં ઘટાડો થાય છે. એ જ પ્રમાણે જો કોઈ નિયત અંતર કાપવા માટે, ઝડપમાં વધારો થાય તો, તેને અનુરૂપ સમયમાં ઘટાડો થાય છે. આ બાબત સમજવા માટે નીચે આપેલ સ્થિતિનો વિચાર કરીએ.

986450

ઝાહિદા તેની શાળાએ ચાર અલગ-અલગ રીતે જઈ શકે છે : ચાલીને, દોડીને, સાયકલ ઉપર અથવા કારમાં. હવે નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો.

$\times 2$ $\quad \times 3$ $\quad \times 15$

	ચાલીને	દોડીને	સાયકલ દ્વારા	કાર દ્વારા
ઝડપ (કિમી/કલાકમાં)	3	6	9	45
સમય (મિનિટમાં)	30	15	10	2

$\times \frac{1}{2}$ $\quad \times \frac{1}{3}$ $\quad \times \frac{1}{15}$

ધ્યાન આપો, અહીં જેમ ઝડપમાં વધારો થાય છે, તેમ નિયત અંતર કાપતાં લાગતા સમયમાં ઘટાડો થાય છે.

જ્યારે ઝાહિદા દોડીને પોતાની ઝડપ બમણી કરે છે ત્યારે અંતર કાપતાં લાગતો સમય $\frac{1}{2}$ ભાગનો થાય છે. હવે જ્યારે તે સાયકલનો ઉપયોગ કરીને ઝડપ ત્રણ ગણી કરે છે ત્યારે લાગતો સમય $\frac{1}{3}$ ભાગનો થાય છે. આ જ પ્રમાણે ઝડપમાં 15 ગણો વધારો થતાં નિયત અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય $\frac{1}{15}$ ગણો થાય છે. અર્થાત્, નિયત અંતર કાપવા માટે લાગતા સમયમાં થતો ઘટાડો, ઝડપમાં થતાં વધારાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે. શું આપણે કહી શકીએ કે, ઝડપ અને સમય એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં પરિવર્તિત થાય છે ?

> બે પરસ્પર વ્યસ્ત સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 1 થાય. તેથી $\frac{1}{2}$ એ 2 ની વ્યસ્ત સંખ્યા છે. તેમજ 2 એ $\frac{1}{2}$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા છે. (અહીં $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$)

ચાલો, એક બીજું ઉદાહરણ જોઈએ. એક શાળા, ગણિતના પાઠ્યપુસ્તક માટે ₹ 6000 ખર્ચ કરવા માંગે છે. ₹ 40 પ્રતિ પુસ્તકના દરે કેટલાં પુસ્તક ખરીદી શકાય ? અહીં, સ્પષ્ટ છે કે 150 પુસ્તક ખરીદી શકાય. હવે જો પુસ્તકની કિંમત ₹ 40થી વધારે હોય તો આપેલ રકમમાં 150થી ઓછાં પુસ્તકોની ખરીદી શક્ય બનશે. નીચે આપેલ કોષ્ટક જુઓ :

એક પુસ્તકની કિંમત (₹ માં)	40	50	60	75	80	100
ખરીદી શકાય તેટલા પુસ્તકોની સંખ્યા	150	120	100	80	75	60

તમે શું અવલોકન કર્યું ? તમે જોઈ શકો છો કે જ્યારે એક પુસ્તકની કિંમતમાં વધારો થાય છે ત્યારે નિયત રકમમાં ખરીદી શકાય તેવાં પુસ્તકોની સંખ્યામાં ઘટાડો થાય છે.

જ્યારે પુસ્તકની કિંમત ₹ 40થી વધીને ₹ 50 થાય છે ત્યારે તેની વૃદ્ધિમાં થતો ગુણોત્તર 4 : 5 છે અને તેમને અનુરૂપ પુસ્તકોની સંખ્યા 150થી ઘટીને 120 થાય છે. તેથી તેમનો ગુણોત્તર 5 : 4 થાય. અર્થાત્ આ બંને ગુણોત્તરો એકબીજાના વ્યસ્ત છે.

ધ્યાન આપો, બે રાશિઓને અનુરૂપ મૂલ્યોનો ગુણાકાર અચળ હોય છે.

અર્થાત્ $40 \times 150 = 50 \times 120 = 6000$.

હવે જો આપણે એક પુસ્તકની કિંમત x અને ખરીદી શકાય તેવાં પુસ્તકોની સંખ્યાને y તરીકે દર્શાવીએ તો જ્યારે xમાં વધારો થાય ત્યારે yમાં ઘટાડો થશે અને તે જ પ્રમાણે xમાં ઘટાડો થાય તો yમાં વધારો થશે. અહીં બંનેનો ગુણાકાર xy અચળ રહે તે અગત્યનું છે. આમ આપણે કહી શકીએ કે x એ yના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે અને y એ xના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે. આમ, **જો બે રાશિઓ x અને y વચ્ચે $xy = k$ પ્રકારનો કોઈ સંબંધ હોય, તો તેઓ એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે તેમ કહેવાય, અહીં k અચળાંક છે.**

હવે જો xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2 ને અનુરૂપ yનાં મૂલ્યો અનુક્રમે y_1 અને y_2 હોય તો

$x_1 y_1 = x_2 y_2 (= k)$ અર્થાત $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ થાય.

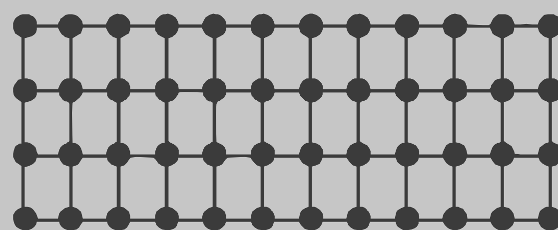
આમ, x અને y વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

આમ, ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં એક પુસ્તકની કિંમત અને નિયત રકમમાં ખરીદાયેલ પુસ્તકોની સંખ્યા એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. તેવી જ રીતે વાહનની ઝડપ અને નિયત અંતર કાપવા માટે લાગતો સમય એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. આ પ્રકારનાં બીજાં અન્ય રાશિયુગ્મો વિશે વિચારો કે જેઓ વ્યસ્ત પ્રમાણમાં પરિવર્તિત થતાં હોય. હવે તમે આ પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપેલ ખુરશીઓની ગોઠવણી વિશેની સમસ્યાનો વિચાર કરો.

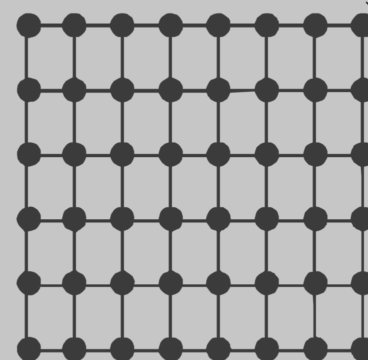
વ્યસ્ત પ્રમાણમાં આ મુદ્દાને નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા વધુ સારી રીતે સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

આટલું કરો

એક ચોરસ કાગળ લો અને તેના પર 48 ‘કુકરી’ને અલગ-અલગ સંખ્યાની હરોળમાં દર્શાવ્યા મુજબ ગોઠવો.



4 હાર, 12 સ્તંભ



6 હાર, 8 સ્તંભ

હરોળની સંખ્યા (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
સ્તંભની સંખ્યા (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

શું તમે જોયું ? અહીં જ્યારે Rમાં વધારો થાય છે ત્યારે Cમાં ઘટાડો થાય છે.

(i) શું $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ છે ? (ii) શું $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ છે ?

(iii) શું R અને C એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?

આ પ્રવૃત્તિ 36 ‘કુકરી’ લઈને ફરીથી કરો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરીને બતાવો કે કયા બે ચલ(અહીં x અને y)ની જોડ પરસ્પર વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

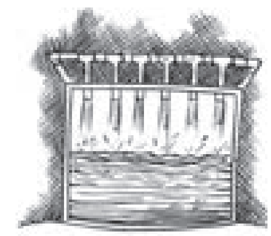
હવે થોડાંક એવાં ઉદાહરણ જોઈએ જેમાં વ્યસ્ત પ્રમાણનો ઉપયોગ થતો હોય,

જ્યારે બે રાશિઓ x અને y સમપ્રમાણમાં (અથવા સમચલનમાં) હોય, તો તેને $x \propto y$ લખી શકાય. જ્યારે બે રાશિઓ x અને y વ્યસ્ત પ્રમાણમાં (અથવા વ્યસ્ત ચલનમાં) હોય ત્યારે તેને $x \propto \frac{1}{y}$ લખાય.

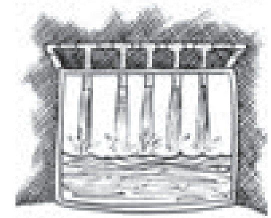
ઉદાહરણ 6 : એક ટાંકીને 1 કલાક અને 20 મિનિટમાં ભરવા માટે 6 પાઇપનો ઉપયોગ કરવો પડે છે. હવે જો ફક્ત 5 પાઇપનો ઉપયોગ કરીએ તો ટાંકીને ભરાતા કેટલો સમય લાગે ?

ઉકેલ : ધારો કે ટાંકીને ભરવા માટે લાગતો સમય x મિનિટ છે.

તેથી આપેલ કોષ્ટક પ્રમાણે :



પાઇપની સંખ્યા	6	5
સમય (મિનિટમાં)	80	x



પાઇપની સંખ્યા જેટલી ઓછી, ટાંકી ભરાવામાં લાગતો સમય એટલો જ વધારે. અર્થાત્ આ વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે.

માટે, $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

$\therefore \quad \frac{80 \times 6}{5} = x$

$\therefore \quad x = 96$

આમ, 5 પાઇપ વડે ટાંકીને ભરાતાં લાગતો સમય 96 મિનિટ એટલે કે 1 કલાક 36 મિનિટ થાય.

ઉદાહરણ 7 : એક છાત્રાલયમાં 100 વિદ્યાર્થીઓ છે. 20 દિવસ ચાલે તેટલી ભોજનસામગ્રી પડેલ છે. હવે જો 25 વિદ્યાર્થીઓ નવા આવે, તો ભોજનસામગ્રી કેટલા દિવસ ચાલશે ?

ઉકેલ : ધારો કે 125 વિદ્યાર્થીઓ હોય તો ભોજનસામગ્રી y દિવસ સુધી ચાલશે. આપની પાસે નીચે પ્રમાણેનું કોષ્ટક છે :

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	100	125
દિવસ	20	y

ધ્યાન આપો, અહીં જેમ વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા વધશે, તેમ સામગ્રી ખલાસ થવા માટેના દિવસો ઘટશે.

આથી, આ વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે.

તેથી, $100 \times 20 = 125 \times y$

અથવા $\frac{100 \times 20}{125} = y$ અથવા $16 = y$

આમ, જો 25 વિદ્યાર્થી વધારે જોડાય તો ભોજનસામગ્રી 16 દિવસ ચાલશે.

બીજી રીત : અહીં $x_1 y_1 = x_2 y_2$ ને $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ તરીકે પણ લખી શકાય.

અર્થાત $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$

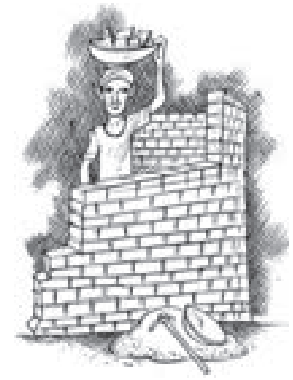
$\therefore \quad 100 : 125 = y : 20$

$\therefore \quad y = \frac{100 \times 20}{125} = 16$

ઉદાહરણ 8 : જો 15 કારીગર એક દીવાલ 48 કલાકમાં બનાવી શકે તો આ જ કામને 30 કલાકમાં પૂરું કરવા કેટલા કારીગર જોઈએ ?

ઉકેલ : ધારો કે 30 કલાકમાં કામ પૂરું કરવા માટે જરૂરી કારીગરોની સંખ્યા y છે.

તેથી આપણને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક મળે.



સમય (કલાકમાં)	48	30
કારીગરની સંખ્યા	15	y

અહીં વધારે કારીગર હોય તો દીવાલ બનાવવા ઓછો સમય લાગે.
આમ, આ એક વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે.

માટે, $48 \times 15 = 30 \times y$

$\therefore \quad \frac{48 \times 15}{30} = y$

$\therefore \quad y = 24$

અર્થાત્ આ કામને 30 કલાકમાં પૂરું કરવા માટે 24 કારીગરની જરૂર પડે.

સ્વાધ્યાય 11.2

1. નીચેનામાંથી કયાં વિધાનો વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?
   (i) કોઈ એક કામમાં કારીગરોની સંખ્યા અને કામ પૂરું કરવા માટે લાગતો સમય.
   (ii) યાત્રા કરવા માટેનો કુલ સમય અને અચળ ઝડપથી કાપેલું અંતર.
   (iii) એક ખેતરનું ક્ષેત્રફળ અને તેમાંથી લીધેલ પાકનો જથ્થો.
   (iv) એક નિશ્ચિત યાત્રા માટે લાગતો સમય અને વાહનની ઝડપ.
   (v) કોઈ એક દેશની કુલ જનસંખ્યા અને વ્યક્તિ દીઠ જમીનનું ક્ષેત્રફળ.

2. એક ટેલીવિઝન ગેમ શો(game show)માં પુરસ્કારની રકમ ₹ 1,00,000 દરેક વિજેતાને સરખા ભાગે વહેંચવામાં આવે છે. નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટકને પૂર્ણ કરો અને જણાવો કે કોઈ એક વ્યક્તિગત વિજેતાને મળેલી પુરસ્કારની રકમ કુલ વિજેતાઓની સંખ્યાના સમપ્રમાણમાં છે કે વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?

વિજેતાઓની સંખ્યા	1	2	4	5	8	10	20
પ્રત્યેક વિજેતાને મળેલ પુરસ્કાર (₹માં)	1,00,000	50,000					

3. રહેમાન, એક પૈડામાં આરા (spokes) લગાવે છે. આ માટે તે સમાન લંબાઈના આરાનો ઉપયોગ કરે છે. હવે તે આરા એવી રીતે લગાવે છે કે જેથી બે ક્રમિક આરા વચ્ચે બનતો ખૂણો સમાન હોય. હવે તેને નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂર્ણ કરીને મદદ કરો.

આરાની સંખ્યા	4	6	8	10	12
બે ક્રમિક આરા વચ્ચે બનતો ખૂણો	90°	60°			

(i) શું આરાની સંખ્યા અને બે ક્રમિક આરા વચ્ચે બનતો ખૂણો પરસ્પર વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે ?

(ii) 15 આરાવાળા એક પૈડામાં બે ક્રમિક આરાની જોડ વચ્ચે બનતા ખૂણાનું માપ શોધો.

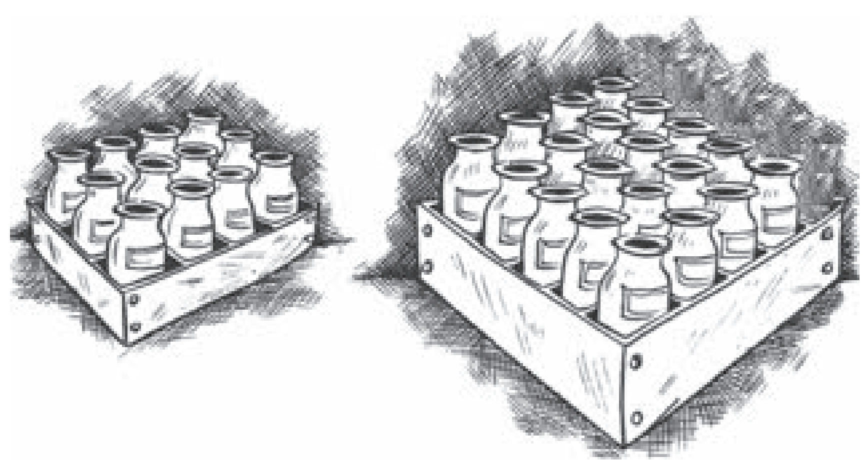
(iii) બે ક્રમિક આરાની જોડ વચ્ચે બનતા ખૂણાનું માપ 40° છે તો આરાની સંખ્યા શોધો.

4. ડબ્બામાં રહેલી મીઠાઈને 24 બાળકો વચ્ચે વહેંચતાં પ્રત્યેક બાળકને મીઠાઈના 5 ટુકડા મળે છે. હવે જો બાળકોની સંખ્યામાં 4નો ઘટાડો થાય તો પ્રત્યેક બાળકને કેટલી મીઠાઈ મળશે ?

5. એક ખેડૂત પાસે 20 પશુઓને 6 દિવસ સુધી ખવડાવી શકાય તેટલો ઘાસચારો છે. હવે જો તેની પાસે 10 પશુઓ વધારે આવે તો આ ઘાસચારો કેટલા દિવસ ચાલશે ?

6. એક ઠેકેદાર અંદાજ મૂકે છે કે જશમિંદરના ઘરે ફરીથી વીજતાર લગાવવાનું કામ 3 વ્યક્તિ, 4 દિવસમાં પૂરું કરી શકે છે. હવે જો તે 3ના બદલે 4 વ્યક્તિને આ કામ પર લગાવે તો આ કામ કેટલા દિવસમાં પૂરું થાય ?

7. એક જથ્થામાં રહેલી શીશીઓને, 1 બૉક્સમાં 12 શીશીઓ હોય તેવા 25 બૉક્સમાં રાખવામાં આવેલ છે. હવે જો આ જથ્થાની શીશીઓને એવી રીતે રાખવામાં આવે કે જેથી પ્રત્યેક બૉક્સમાં 20 શીશીઓ હોય તો આવાં કેટલાં બૉક્સ ભરાશે ?



8. એક ફેક્ટરીમાં નિશ્ચિત સંખ્યાની વસ્તુઓ 63 દિવસમાં બનાવવા 42 યંત્રોની જરૂર પડે છે. આ જ સંખ્યાની વસ્તુઓ 54 દિવસમાં બનાવવા કેટલાં યંત્રો જોઈએ ?

9. એક કારને 60 કિમી/કલાકની ઝડપથી કોઈ એક સ્થાન પર પહોંચવા માટે 2 કલાકનો સમય લાગે છે. હવે જો કારની ઝડપ 80 કિમી/કલાક હોય તો કેટલો સમય લાગશે ?

10. એક ઘરમાં નવી બારીઓ લગાવવા માટે 2 વ્યક્તિઓને 3 દિવસ લાગે છે.

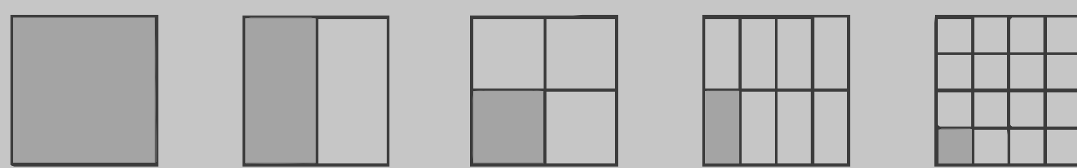
(i) કાર્યની શરૂઆતમાં જ એક વ્યક્તિ બીમાર પડે તો કાર્ય પૂરું કરવામાં કેટલો સમય લાગશે ?

(ii) એક જ દિવસમાં બારીઓ લગાવવા કેટલી વ્યક્તિઓની જરૂર પડશે ?

11. કોઈ એક શાળામાં 45 મિનિટનો એક એવા 8 તાસ છે. હવે જો શાળામાં 9 તાસ કરવા હોય તો દરેક તાસનો સમય કેટલો રાખવો પડે ? (અહીં, શાળાનો સમય સમાન રહે છે તેવું માનવું.)

આટલું કરો

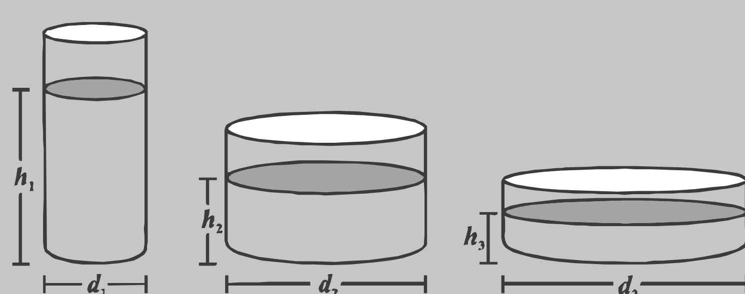
1. એક કાગળ લો. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ તેમાં ગડી પાડી અને સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરો. દરેક સ્થિતિમાં બનતા ભાગની સંખ્યા અને કોઈ એક ભાગનું ક્ષેત્રફળ લખો.



તમારા અવલોકનોને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો અને તમારા મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો. શું આ એક વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે ? કેમ ?

ભાગની સંખ્યા	1	2	4	8	16
પ્રત્યેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ	કાગળનું ક્ષેત્રફળ	કાગળના ક્ષેત્રફળનો $\frac{1}{2}$ ભાગ			

2. ગોળાકાર તળિયું ધરાવતાં અલગ અલગ માપનાં પાત્ર લો. પ્રત્યેક પાત્રમાં નિશ્ચિત જથ્થાનું પાણી ભરો. હવે દરેક પાત્રનો વ્યાસ અને તેમાં રહેલા પાણીની ઊંચાઈ નોંધો. તમારાં અવલોકનોનું કોષ્ટક બનાવો. શું આ એક વ્યસ્ત પ્રમાણની સ્થિતિ છે ?



પાત્રનો વ્યાસ (સેમીમાં)			
પાણીની સપાટીનું સ્તર (સેમીમાં)			

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જો બે રાશિ x અને y એક સાથે એવી રીતે વધે (કે ઘટે) કે જેથી તેમનાં અનુરૂપ મૂલ્યોનો ગુણોત્તર અચળ રહે તો તે સમપ્રમાણમાં છે તેમ કહેવાય. એટલે કે જો $\frac{x}{y} = k$ (k કોઈ ધન સંખ્યા છે.) હોય તો x અને y સમપ્રમાણમાં છે તેમ કહેવાય. આ સ્થિતિમાં xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2ને અનુરૂપ yનાં ક્રમિક મૂલ્યો y_1 અને y_2 હોય, તો $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ થાય.

2. બે રાશિ x અને y માટે જો રાશિ xમાં થતો વધારો (કે ઘટાડો), રાશિ yમાં એવી રીતે ઘટાડો (કે વધારો) કરે કે જેથી તેમનાં અનુરૂપ મૂલ્યોનો ગુણાકાર અચળ રહે તો તેઓ એકબીજાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે તેમ કહેવાય. એટલે કે જો $xy = k$ હોય તો x અને y પરસ્પર વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે. આ સ્થિતિમાં xનાં મૂલ્યો x_1 અને x_2ને અનુરૂપ yનાં ક્રમિક મૂલ્યો y_1 અને y_2 હોય તો $x_1 y_1 = x_2 y_2$ અથવા $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ થાય.

પ્રકરણ 12

અવયવીકરણ

GVJXHY

12.1 પ્રાસ્તાવિક

12.1.1 પ્રાકૃતિક સંખ્યાના અવયવો (Factors o atura umbers)

ધોરણ 6 માં અવયવો વિશે ભણ્યા તે તમને યાદ હશે.
ચાલો એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા લઈએ.
ધારો કે 30, તેને પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ગુણાકારના રૂપમાં લખો.

$30 = 2 \times 15$

$= 3 \times 10 = 5 \times 6$

તેથી 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 અને 30 એ 30ના અવયવો છે.
આમાંથી 2, 3, 5 એ તેના અવિભાજ્ય અવયવો છે. (કેમ ?)

જે સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય, તેને તે સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ કહી શકાય.

દા. ત., 30નું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ $2 \times 3 \times 5$ થાય.

70નું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ $2 \times 5 \times 7$ છે,

90નું અવિભાજ્ય અવયવ રૂપ $2 \times 3 \times 3 \times 5$ છે.

આપણને ખબર છે કે, 30ને $30 = 1 \times 30$ પણ લખી શકાય. તેથી, 1 અને 30 પણ 30ના અવયવ છે. તમે નોંધ લેશો કે 1 એ કોઈ પણ સંખ્યાનો અવયવ છે. દા.ત., $101 = 101 \times 1$ જ્યારે આપણે કોઈ સંખ્યાને તેના અવયવના ગુણાકારના રૂપમાં લખીશું ત્યારે 1ને તેના અવયવ તરીકે નહિ લખીએ જ્યાં સુધી ખાસ જરૂરિયાત ન હોય.

આ રીતે આપણે બૈજિક પદાવલિ(Algebraic Expressions)ને તેના અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં લખી શકીએ. જે આપણે આ પ્રકરણમાં શીખીશું.

12.1.2 બૈજિક પદાવલિના અવયવો (Factors o ebraic ressions)

આપણે ધોરણ 7માં જોયું કે બૈજિક પદાવલિમાં પદો એ અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં હોય છે.
દા.ત., બૈજિક પદાવલિ $5xy + 3x$માં પદ $5xy$ એ અવયવો 5, x અને yથી બનેલ છે.

એટલે કે, $5xy = 5 \times x \times y$

અવલોકન કરો કે અવયવો 5, x અને y ને ફરીથી અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં દર્શાવી શકાશે નહિ.
આપણે કહી શકીએ કે 5, x અને y એ $5xy$ના અવિભાજ્ય અવયવો છે. બૈજિક પદાવલિમાં આપણે અવિભાજ્યના બદલે અવિભાજિત શબ્દ વાપરીશું. આપણે કહી શકીએ કે $5 \times x \times y$ એ $5xy$નું અવિભાજિત અવયવ રૂપ છે. **નોંધ :** $5 \times (xy)$ એ $5xy$નું અવિભાજિત અવયવ રૂપ નથી, કારણ કે xyને x અને yના ગુણાકારના રૂપમાં દર્શાવી શકાય. અર્થાત્ $xy = x \times y$

નોંધ : 1 એ $5xy$નો અવયવ છે, તેથી $5xy = 1 \times 5 \times x \times y$ હકીકતમાં 1 એ બધા પદોનો અવયવ છે, છતાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જેમ, જ્યારે ખાસ જરૂરિયાત હોય ત્યારે જ તેને કોઈ પણ પદના અવયવના રૂપમાં દર્શાવીશું.

અન્ય પદાવલિ વિચારો : $3x(x + 2)$ જેને 3, x અને $(x + 2)$ અવયવોનાં ગુણાકારના રૂપમાં લખી શકાય.

$$3x(x + 2) = 3 \times x \times (x + 2)$$

અવયવો 3, x અને $(x + 2)$ એ $3x(x + 2)$ના અવિભાજિત અવયવો છે. આ રીતે પદાવલિ $10x(x + 2)(y + 3)$ને તેના અવિભાજિત અવયવોના રૂપમાં આ રીતે દર્શાવી શકાય.

$$10x(x + 2)(y + 3) = 2 \times 5 \times x \times (x + 2) \times (y + 3)$$

12.2 અવયવીકરણ એટલે શું ?

જ્યારે આપણે બૈજિક પદાવલિનું અવયવીકરણ કરીએ ત્યારે તેને અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં લખીએ છીએ. આ અવયવો સંખ્યા, બૈજિક ચલ કે બૈજિક પદાવલિ હોઈ શકે.

98EZ7D

પદાવલિઓ જેવી કે $3xy$, $5x^2y$, $2x(y + 2)$, $5(y + 1)(x + 2)$ અવયવનાં રૂપમાં જ છે. તેના અવયવો માત્ર તેને વાંચીને જ મેળવી શકાય છે, જે આપણે જાણીએ છીએ.

બીજી તરફ $2x + 4$, $3x + 3y$, $x^2 + 5x$, $x^2 + 5x + 6$ જેવી પદાવલિમાં તેમના અવયવો સીધા મળી શકે તેમ નથી. આ પદાવલિનું અવયવીકરણ કરવા માટે અર્થાત્ અવયવો મેળવવા માટે એક વ્યવસ્થિત પદ્ધતિની જરૂર છે. જે આપણે હવે શીખીશું.

12.2.1 સામાન્ય અવયવોની રીત

- આપણે એક સાદી પદાવલિ $(2x + 4)$ લઈએ.

દરેક પદને આપણે અવિભાજિત અવયવોના રૂપમાં લખીએ.

$$2x = 2 \times x$$
$$4 = 2 \times 2$$
$$2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

અહીં, 2 એ બન્ને પદમાં સામાન્ય અવયવ છે.

વિભાજનના નિયમના આધારે અવલોકન કરતાં,

$$2 \times (x + 2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

તેથી આપણે લખી શકીએ કે,

$$2x + 4 = 2 \times (x + 2) = 2(x + 2)$$

આમ, પદાવલિ $2x + 4$ એ $2(x + 2)$ જેવી જ છે. તેના અવયવો 2 અને $(x + 2)$ તરીકે વાંચી શકાય જે તેના અવિભાજિત અવયવો છે.

ધારો કે $5xy + 10x$ના અવયવ મેળવવા છે.

તો, $5xy$ અને $10x$ને તેના અવિભાજિત અવયવોના રૂપમાં નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$5xy = 5 \times x \times y$$
$$10x = 2 \times 5 \times x$$

અહીં, 5 અને x એ બન્ને પદમાં સામાન્ય અવયવો છે.

હવે, $5xy + 10x$

$$= (5 \times x \times y) + (2 \times 5 \times x)$$
$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

આપણે બન્ને પદને વિભાજનના નિયમનો ઉપયોગ કરીને જોડીએ,

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y + 2)$$

તેથી, $5xy + 10x = 5x(y + 2)$ જે પદાવલિનું ઇચ્છિત અવયવ સ્વરૂપ છે.

ઉદાહરણ 1 : $12a^2b + 15ab^2$નું અવયવીકરણ કરો.

ઉકેલ :
$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$
$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

બન્ને પદોમાં 3, a, અને b સામાન્ય અવયવો છે.

તેથી,
$$12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$$
$$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$$
($\because$ પદોને જોડતાં;)
$$= 3ab \times (4a + 5b)$$
$$= 3ab(4a + 5b) \text{ (જરૂરી અવયવ રૂપ)}$$

ઉદાહરણ 2 : $10x^2 - 18x^3 + 14x^4$નું અવયવીકરણ કરો.

ઉકેલ :
$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$
$$18x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$$
$$14x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$$

ત્રણે પદોમાં 2, x અને x સામાન્ય અવયવો છે.

તેથી,
$$10x^2 - 18x^3 + 14x^4 = (2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x) + (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$$
$$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)] \quad (\because \text{ ત્રણે પદોને જોડતાં;})$$
$$= 2x^2(5 - 9x + 7x^2)$$
$$= \underbrace{2x^2(7x^2 - 9x + 5)}$$

તમે નોંધ્યું કે પદાવલિના અવયવ રૂપમાં માત્ર એક જ પદ છે ?

પ્રયત્ન કરો

અવયવો શોધો : (i) $12x + 36$ (ii) $22y - 33z$ (iii) $14pq + 35pqr$

12.2.2 પદોની પુનઃગોઠવણી દ્વારા અવયવીકરણ

પદાવલિ $2xy + 2y + 3x + 3$ને જુઓ. તમે જોશો કે પ્રથમ બે પદોમાં 2 અને y અને છેલ્લાં બે પદોમાં 3 સામાન્ય અવયવ છે. પણ બધાં પદોમાં સામાન્ય અવયવ એક પણ નથી.

$(2xy + 2y)$ને અવયવોના રૂપમાં લખીએ

$$2xy + 2y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$$
$$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$$
$$= (2y \times x) + (2y \times 1)$$
$$= 2y(x + 1)$$

તે રીતે,
$$3x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$$
$$= 3 \times (x + 1)$$
$$= 3(x + 1)$$

નોંધ : અહીં 1 ને અવયવ તરીકે દર્શાવવો જરૂરી છે. શા માટે ?

તેથી
$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y(x + 1) + 3(x + 1)$$

અહીં, બન્ને પદોની જમણી બાજુમાં $(x + 1)$ સામાન્ય અવયવ છે. બન્ને પદોને જોડતાં,
$$2xy + 2y + 3x + 3 = 2y(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(2y + 3)$$

હવે, પદાવલિ $2xy + 2y + 3x + 3$ તેના અવયવોના ગુણાકારના રૂપમાં છે. તેના અવયવો $(x + 1)$ અને $(2y + 3)$ છે. જે અવિભાજિત અવયવો છે.

પદોની પુનઃગોઠવણી એટલે શું ?

ધારો કે, આપણે હમણાં અભ્યાસમાં લીધેલ પદાવલિ જો $2xy + 3 + 2y + 3x$ સ્વરૂપે આપવામાં આવે તો, તેનું અવયવીકરણ સરળ બનતું નથી. જેથી, આ પદાવલિના અવયવ મેળવવા આપેલાં પદોનાં સ્થાનમાં ફેરફાર કરી તેને $2xy + 2y + 3x + 3$ સ્વરૂપે લેતાં $(2xy + 2y)$ અને $(3x + 3)$ એવાં બે જૂથ મળે, જેનાથી અવયવીકરણ સરળ બને. આ પ્રક્રિયાને પદોની પુનઃગોઠવણી કહે છે.

પદોની પુનઃગોઠવણી એકથી વધારે રીતે થઈ શકે. ધારો કે, આપણે પદાવલિને $2xy + 3x + 2y + 3$ ક્રમમાં ગોઠવીએ તો,

$$\begin{aligned} 2xy + 3x + 2y + 3 &= 2 \times x \times y + 3 \times x + 2 \times y + 3 \\ &= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3) \\ &= (2y + 3)(x + 1) \end{aligned}$$

અહીં, અવયવો સમાન જ મળે છે. પરંતુ માત્ર અલગ ક્રમમાં દેખાય છે.

ઉદાહરણ 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ નું અવયવીકરણ કરો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 બધાં પદોમાં કોઈ સામાન્ય અવયવ છે ? તે ચકાસો. અહીં એક પણ નથી.

સોપાન 2 ગોઠવણી વિશે વિચારો. જુઓ પ્રથમ બે પદોમાં $2y$ સામાન્ય અવયવ છે.

$$6xy - 4y = 2y(3x - 2) \qquad (a)$$

છેલ્લાં બે પદોનું શું ? તમે તેનો ક્રમ $-9x + 6$ કરો તો અવયવ $(3x - 2)$ મળશે.

$$\begin{aligned} -9x + 6 &= -3(3x) + 3(2) \\ &= -3(3x - 2) \qquad (b) \end{aligned}$$

સોપાન 3 (a) અને (b)ને સાથે લેતાં

$$\begin{aligned} 6xy - 4y + 6 - 9x &= 6xy - 4y - 9x + 6 \\ &= 2y(3x - 2) - 3(3x - 2) \\ &= (3x - 2)(2y - 3) \end{aligned}$$

$(3x - 2)$ અને $(2y - 3)$ એ $(6xy - 4y + 6 - 9x)$ના અવયવો છે.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. આપેલાં પદોમાં સામાન્ય અવયવ મેળવો.

(i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14pq, 28p^2q^2$
(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12a^2b$ (vi) $16x^3, -4x^2, 32x$
(vii) $10pq, 20qr, 30rp$ (viii) $3x^2y^3, 10x^3y^2, 6x^2y^2z$

2. આપેલી પદાવલિઓના અવયવ મેળવો.

(i) $7x - 42$ (ii) $6p - 12q$ (iii) $7a^2 + 14a$
(iv) $-16z + 20z^3$ (v) $20l^2m + 30alm$ (vi) $5x^2y - 15xy^2$
(vii) $10a^2 - 15b^2 + 20c^2$ (viii) $-4a^2 + 4ab - 4ca$ (ix) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$
(x) $ax^2y + bxy^2 + cxyz$

3. અવયવ મેળવો.

(i) $x^2 + xy + 8x + 8y$ (ii) $15xy - 6x + 5y - 2$ (iii) $ax + bx - ay - by$
(iv) $15pq + 15 + 9q + 25p$
(v) $z - 7 + 7xy - xyz$

12.2.3 નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને અવયવીકરણ

આ અભિ ય તઓ નિત્યસમ છે.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{(I)}$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{(II)}$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{(III)}$$
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{(IV)}$$

નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા આપણે આ નિત્યસમનો ઉપયોગ અવયવીકરણમાં કેવી રીતે થાય એ શીખીશું. આપણે પદાવલિઓનું અવલોકન કરીશું. જો કોઈ પદાવલિનું રૂપ (પ્રકાર) કોઈ પણ નિત્યસમની જમણી બાજુ જેવું હોય તો તે પદાવલિના ડાબી બાજુનાં પદો એ તેનું યોગ્ય અવયવીકરણ આપશે.

ઉદાહરણ 4 : $x^2 + 8x + 16$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : પદાવલિનું અવલોકન કરો. અહીં ત્રણ પદો છે. તેથી તે નિત્યસમ (III) જેવું નથી. તેનું પ્રથમ અને છેલ્લું પદ પૂર્ણવર્ગ છે અને વચ્ચેના પદ પહેલા '+'ની નિશાની છે. તેથી તે $a^2 + 2ab + b^2$વાળું રૂપ છે. જ્યાં $a = x$ અને $b = 4$

જેથી, $a^2 + 2ab + b^2 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$
$= x^2 + 8x + 16$

હવે, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ સાથે સરખાવતાં,
$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

ઉદાહરણ 5 : $4y^2 - 12y + 9$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : અવલોકન કરો, $4y^2 = (2y)^2$, $9 = 3^2$, $12y = 2 \times 3 \times 2y$

તેથી, $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \times (3) \times (2y) + (3)^2$
$= (2y - 3)^2$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

અહીં અવલોકન કરી શકીએ કે, આપેલ પદાવલિનું સ્વરૂપ : $a^2 - 2ab + b^2$ પ્રકારનું છે. જ્યાં $a = 2y$ અને $b = 3$ અને $2ab = 2(2y)(3) = 12y$

ઉદાહરણ 6 : $49p^2 - 36$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં બે પદો છે, બંને પૂર્ણવર્ગ છે અને બીજું પદ ઋણ છે.

પદાવલિનું રૂપ $(a^2 - b^2)$ જેવું છે. અહીં નિત્યસમ III નો ઉપયોગ કરીશું.

$$49p^2 - 36 = (7p)^2 - (6)^2$$
$$= (7p - 6)(7p + 6) \quad \text{(જરૂરી અવયવીકરણ)}$$

ઉદાહરણ 7 : $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ પદાવલિના પ્રથમ ત્રણ પદોનું રૂપ $(a - b)^2$ જેવું છે અને ચોથું પદ પૂર્ણવર્ગ છે. એટલે આપેલ પદાવલિને બે વર્ગોના તફાવતના રૂપમાં લખી શકાય.

તેથી, $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$ (નિત્યસમ II)
$= [(a - b) - c]\,[(a - b) + c]$ (નિત્યસમ III)
$= (a - b - c)\,(a - b + c)$ (જરૂરી અવયવીકરણ)

અહીં, નોંધો કે જરૂરી અવયવીકરણ માટે આપણે બે નિત્યસમ એક પછી એક લાગુ પાડ્યા છે.

ઉદાહરણ 8 : $m^4 - 256$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : $m^4 = (m^2)^2$ અને $256 = (16)^2$

તેથી, આપેલ પદાવલિ નિત્યસમ (III) જેવી છે.

$$m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$$
$$= (m^2 - 16)(m^2 + 16) \quad \text{(નિત્યસમ (III) પરથી)}$$

હવે $(m^2 + 16)$નું આગળ અવયવીકરણ ન થઈ શકે પણ $(m^2 - 16)$નું નિત્યસમ (III) દ્વારા આગળ અવયવીકરણ થઈ શકે.

$$m^2 - 16 = m^2 - 4^2$$
$$= (m - 4)(m + 4)$$

તેથી $m^2 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$

12.2.4 $(x + a)$ $(x + b)$ પ્રકારના અવયવો

હવે આપણે એક ચલવાળી પદાવલિઓનું અવયવીકરણ શીખીએ. જેવી કે, $x^2 + 5x + 6$, $y^2 - 7y + 12$, $z^2 - 4z - 12$, $3m^2 + 9m + 6$ વિગેરે....અવલોકન કરો કે આ પદાવલિઓ $(a + b)^2$ કે $(a - b)^2$ જેવી નથી. તે પૂર્ણવર્ગ પણ નથી. દા.ત., $x^2 + 5x + 6$માં 6 એ પૂર્ણવર્ગ નથી.

આ પદાવલિઓ $(a^2 - b^2)$ જેવી પણ નથી. તે $x^2 + (a + b)x + ab$ જેવી લાગે છે. તેથી આપણે નિત્યસમ (IV)નો ઉપયોગ કરીને આવી પદાવલિઓનું અવયવીકરણ કરીએ.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \qquad \text{(IV)}$$

તેના માટે આપણે xના સહગુણક અને અચળ પદનું અવલોકન કરીએ.

હવે નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા જોઈએ કે એ કેવી રીતે થશે ?

ઉદાહરણ 9 : $x^2 + 5x + 6$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે નિત્યસમ (IV)ની જમણી બાજુને $x^2 + 5x + 6$ સાથે સરખાવીએ તો આપણને $ab = 6$ અને $a + b = 5$ મળે.

આ પરથી આપણે a અને b મેળવવા પડે, જેથી અવયવો $(x + a)$ અને $(x + b)$ થાય.

જો $ab = 6$ હોય તો a અને b એ 6ના અવયવ છે.

ચાલો, $a = 6$, $b = 1$ લઈ પ્રયત્ન કરીએ. આ કિંમતો માટે $a + b = 7$ મળે, 5 નહીં. તેથી આ પસંદગી યોગ્ય નથી. હવે $a = 2$ અને $b = 3$ ચકાસીએ. અહીં $a + b = 5$ થાય છે.

આમ, આપેલ પદાવલિનું અવયવીકરણવાળું રૂપ $(x + 2)(x + 3)$ થાય.

> વ્યાપક રીતે $x^2 + px + q$ પ્રકારની બૈજિક પદાવલિનું અવયવીકરણ કરવા માટે આપણે qના બે અવયવો a અને b શોધવા પડે જેથી
>
> $\boxed{ab = q \text{ અને } a + b = p \text{ થાય.}}$
>
> તો પદાવલિ $x^2 + (a + b)x + ab$ થશે.
>
> અર્થાત્, $x^2 + ax + bx + ab$ થશે.
>
> અર્થાત્, $x(x + a) + b(x + a)$ થશે.
>
> અર્થાત્, $(x + a)(x + b)$. જે જરૂરી ઇચ્છિત અવયવો છે.

ઉદાહરણ 10 : $y^2 - 7y + 12$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $12 = 3 \times 4$ અને $3 + 4 = 7$

તેથી $y^2 - 7y + 12 = y^2 - 3y - 4y + 12$

$$= y(y - 3) - 4(y - 3) = (y - 3)(y - 4)$$

અહીં નોંધો કે આ વખતે આપણે a અને b શોધવા માટે આપેલ પદાવલિને નિત્યસમ (IV) સાથે સરખાવી નથી. થોડા પ્રયત્નો બાદ આપેલ પદાવલિનું અવયવીકરણ કરવા માટે તમારે પણ તેને નિત્યસમ સાથે સરખાવવાની જરૂર રહેશે નહિ. તમે સીધા જ આગળ વધી શકશો.

ઉદાહરણ 11 : $z^2 - 4z - 12$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં $ab = -12$ તેનો મતલબ a અને bમાંથી કોઈ પણ એક ઋણ છે.

$a + b = -4$ છે તેથી જે સંખ્યા મોટી છે તે ઋણ છે. આપણે $a = -4$ અને $b = 3$ લઈને ચકાસીએ પણ આ શક્ય બનશે નહીં. કારણ કે, અહીં $a + b = -1$ થાય છે.

હવે, $a = -6$, $b = 2$ લઈને ચકાસીએ, અહીં $a + b = -4$ થાય છે.

તેથી,
$$z^2 - 4z - 12 = z^2 - 6z + 2z - 12$$
$$= z(z - 6) + 2(z - 6)$$
$$= (z - 6)(z + 2)$$

ઉદાહરણ 12 : $3m^2 + 9m + 6$ના અવયવ મેળવો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે ત્રણેય પદોમાં 3 એ સામાન્ય અવયવ છે.

તેથી,
$$3m^2 + 9m + 6 = 3(m^2 + 3m + 2)$$

હવે,
$$m^2 + 3m + 2 = m^2 + m + 2m + 2 \qquad (\because 2 = 1 \times 2)$$
$$= m(m + 1) + 2(m + 1)$$
$$= (m + 1)(m + 2)$$

આમ,
$$3m^2 + 9m + 6 = 3(m + 1)(m + 2)$$

સ્વાધ્યાય 12.2

1. નીચેની પદાવલિઓના અવયવ મેળવો.

(i) $a^2 + 8a + 16$ (ii) $p^2 - 10p + 25$ (iii) $25m^2 + 30m + 9$

(iv) $49y^2 + 84yz + 36z^2$ (v) $4x^2 - 8x + 4$ (vi) $121b^2 - 88bc + 16c^2$

(vii) $(l + m)^2 - 4lm$ (સૂચન : $(l + m)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.)

(viii) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

2. અવયવ મેળવો.

(i) $4p^2 - 9q^2$ (ii) $63a^2 - 112b^2$ (iii) $49x^2 - 36$

(iv) $16x^5 - 144x^3$ (v) $(l + m)^2 - (l - m)^2$

(vi) $9x^2y^2 - 16$ (vii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$

(viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$

3. પદાવલિના અવયવ મેળવો.

(i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$

(iv) $am^2 + bm^2 + bn^2 + an^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$

(vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$

(viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$

4. અવયવ મેળવો.

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$

(iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

5. નીચેની પદાવલિના અવયવ મેળવો.

(i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

12.3 બૈજિક પદાવલિઓનો ભાગાકાર (i ision o ebraic ressions)

98NV91

આપણે બૈજિક પદાવલિઓનો સરવાળો અને બાદબાકી કરતા શીખ્યા. આપણને બે પદાવલિઓનો ગુણાકાર કરતાં પણ આવડે છે. પણ આપણે એક બૈજિક પદાવલિનો બીજી પદાવલિ વડે ભાગાકાર કરવા તરફ ધ્યાન આપ્યું નથી. તે આપણે અહીં શીખીશું.

આપણે યાદ કરીએ કે ભાગાકાર એ ગુણાકારની વ્યસ્ત ક્રિયા છે. $7 \times 8 = 56$ તેથી $56 \div 8 = 7$ અથવા $56 \div 7 = 8$

આ જ રીતે આપણે બૈજિક પદાવલિઓનો ભાગાકાર કરીશું.

દા.ત.,

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

તેથી $6x^3 \div 2x = 3x^2$

અને $6x^3 \div 3x^2 = 2x$

(ii) $5x(x + 4) = 5x^2 + 20x$

તેથી $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

અને $(5x^2 + 20x) \div (x + 4) = 5x$

હવે આપણે સમજીશું કે એક પદાવલિનો ભાગાકાર બીજી પદાવલિ દ્વારા કેવી રીતે થાય. આપણે એકપદીનો ભાગાકાર એકપદી દ્વારા કેવી રીતે કરી શકાય ત્યાંથી શરૂઆત કરીશું.

12.3.1 એકપદી વડે બીજી એકપદીનો ભાગાકાર

ધારો કે, $6x^3 \div 2x$

આપણે $2x$ અને $6x^3$નું અવિભાજિત અવયવરૂપ લખીએ.

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

હવે $2x$ને અલગ પાડવા માટે આપણે $6x^3$ના અવયવોનું જૂથ બનાવીએ.

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

તેથી $6x^3 \div 2x = 3x^2$

ટૂંકી રીત : સામાન્ય અવયવોને દૂર કરવા એ બે સંખ્યાનો ભાગાકાર દર્શાવતી રીત છે.

$$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

આ રીતે,
$$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x} = \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

ઉદાહરણ 13 : નીચેના ભાગાકાર કરો.

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

ઉકેલ :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$

તેથી, $(-20x^4) \div 10x^2 = \dfrac{-2\times2\times5\times x\times x\times x\times x}{2\times5\times x\times x}$

$= -2 \times x \times x = -2x^2$

(ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz = \dfrac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times7\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{x\times y\times z}{2} = \dfrac{1}{2}xyz$

પ્રયત્ન કરો

ભાગાકાર કરો.

(i) $6yz^2$ દ્વારા $24xy^2z^3$ (ii) $7a^2b^2c^3$ દ્વારા $63a^2b^4c^6$

12.3.2 એકપદી વડે બહુપદીનો ભાગાકાર

ધારો કે ત્રિપદી $4y^3 + 5y^2 + 6y$નો ભાગાકાર એકપદી $2y$ દ્વારા કરીએ.

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2 \times 2 \times y \times y \times y) + (5 \times y \times y) + (2 \times 3 \times y)$$

(અહીં આપણે બહુપદીના દરેક પદને તેના અવયવોના રૂપમાં દર્શાવ્યું છે.) આપણે જોયું કે, $2 \times y$ એ બધામાં સામાન્ય પદ છે. તેથી દરેક પદમાંથી $2 \times y$ને અલગ કરતાં

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2 \times y \times (2 \times y \times y) + 2 \times y \times \left(\frac{5}{2}\times y\right) + 2 \times y \times 3$$

$$= 2y(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}\times y\right) + 2y(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (સામાન્ય અવયવ $2y$ અલગથી દર્શાવેલ છે.)

તેથી, $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y} = \frac{2y(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3)}{2y}$$

$$= 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

બીજી રીત : આપણે બહુપદીના દરેક પદને એકપદી દ્વારા ભાગી શકીએ.

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y}$$

$$= 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

અહીં આપણે અંશની બહુપદીના દરેક પદને છેદમાં આવેલી એકપદી દ્વારા ભાગીએ છીએ...

ઉદાહરણ 14 : $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ને $8xyz$ વડે બંને રીતથી ભાગો.

ઉકેલ : $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z(x + y + z)$ (સામાન્ય અવયવ લેતાં;)

$= 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$

તેથી, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{8\times3\times xyz\times(x+y+z)}{8\times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3(x + y + z)$$

બીજી રીત, $24(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz \quad = \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24xy^2z}{8xyz} + \frac{24xyz^2}{8xyz}$

$= 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z)$

12.4 બૈજિક પદાવલિના ભાગાકાર (બહુપદી ÷ બહુપદી)

- ધારો કે $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$

આપણે $(7x^2 + 14x)$ ના અવયવો મેળવીશું.

શું અહીં, અંશમાં રહેલ દરેક પદને, છેદમાં રહેલ દ્વિપદી વડે ભાગવાથી સરળતા રહેશે ?

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$
$$= 7 \times x \times (x + 2)$$
$$= 7x(x + 2)$$

હવે $(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \frac{7x^2 + 14x}{x + 2}$

$$= \frac{7x(x+2)}{(x+2)} = 7x$$

[અવયવ $(x + 2)$નો છેદ ઉડાડતાં]

ઉદાહરણ 15 : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ને $11x(x - 8)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ના અવયવ મેળવતાં;

$$44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 5x - 24)$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x^2 - 8x + 3x - 24)$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2[x(x - 8) + 3(x - 8))$$
$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2(x + 3)(x - 8)$$

તેથી, $44(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x+3) \times (x-8)}{11 \times x \times (x-8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x(x + 3) = 4x(x + 3)$$

અંશ અને છેદ બંનેમાં રહેલ સામાન્ય અવયવો : 11, x અને $(x - 8)$નો છેદ ઉડાડતા

ઉદાહરણ 16 : $z(5z^2 - 80)$ને $5z(z + 4)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : ભાજ્ય $= z(5z^2 - 80)$

$$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$$
$$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$$
$$= 5z \times (z + 4)(z - 4)$$

[$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતાં]

આમ, $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \frac{5z \times (z+4)(z-4)}{5z(z+4)} = (z - 4)$

સ્વાધ્યાય 12.3

1. ભાગફળ શોધો.

(i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. આપેલ બહુપદીને એકપદી વડે ભાગો.

(i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$

(v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$

3. નીચેના ભાગાકાર કરો.

(i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$

(iii) $10y(6y + 21) \div 5(2y + 7)$ (iv) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$

(v) $96abc(3a - 12)(5b - 30) \div 144(a - 4)(b - 6)$

4. સૂચવ્યા મુજબ ભાગાકાર કરો.

(i) $5(2x + 1)(3x + 5) \div (2x + 1)$ (ii) $26xy(x + 5)(y - 4) \div 13x(y - 4)$

(iii) $52pqr(p + q)(q + r)(r + p) \div 104pq(q + r)(r + p)$

(iv) $20(y + 4)(y^2 + 5y + 3) \div 5(y + 4)$ (v) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \div x(x + 1)$

5. આપેલી પદાવલિના અવયવ મેળવો અને સૂચવ્યા મુજબ ભાગાકાર કરો.

(i) $(y^2 + 7y + 10) \div (y + 5)$ (ii) $(m^2 - 14m - 32) \div (m + 2)$

(iii) $(5p^2 - 25p + 20) \div (p - 1)$ (iv) $4yz(z^2 + 6z - 16) \div 2y(z + 8)$

(v) $5pq(p^2 - q^2) \div 2p(p + q)$ (vi) $12xy(9x^2 - 16y^2) \div 4xy(3x + 4y)$

(vii) $39y^3(50y^2 - 98) \div 26y^2(5y + 7)$

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જ્યારે આપણે પદાવલિના અવયવ પાડીએ છીએ ત્યારે આપણે પદાવલિને અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખીએ છીએ. આ અવયવો સંખ્યા, બૈજિક ચલ કે બૈજિક પદાવલિ હોઈ શકે.
2. અવિભાજિત અવયવ એ એવો અવયવ છે જેને ફરીથી અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાતો નથી.
3. પદાવલિના અવયવ પાડવાની પદ્ધતિસરની રીત એ સામાન્ય અવયવની રીત છે. તેમાં ત્રણ તબક્કા છે : (i) પદાવલિના દરેક પદને અવિભાજ્ય અવયવના સ્વરૂપે દર્શાવો. (ii) સામાન્ય અવયવોને જુદા તારવો અને (iii) વિભાજનના નિયમની મદદથી દરેક પદના બાકી વધેલ અવયવોને ભેગા કરો.
4. ઘણી વખત આપેલી પદાવલિનાં બધાં પદોમાં કોઈપણ અવયવ સામાન્ય હોતો નથી. તે વખતે આપેલ પદોના એવાં જૂથ બનાવો કે જેથી દરેક જૂથમાં કોઈને કોઈ અવયવ સામાન્ય હોય જ્યારે આપણે આવું કરીએ છીએ ત્યારે દરેક જૂથમાં કોઈ એક સામાન્ય અવયવ મળી આવે છે અને ત્યાર બાદ આપણે પદાવલિના અવયવ મેળવવાની દિશામાં જઈ શકીએ છીએ. આ પદોની પુનઃગોઠવણીની રીત છે.

5. પદોની પુનઃગોઠવણી બાદ અવયવીકરણમાં આપણે યાદ રાખીશું કે આપેલ પદાવલિના પદોનાં માત્ર સ્થાન બદલવાથી કે ગમે તે રીતે પદોની ગોઠવણી કરવાથી (અર્થાત્, માત્ર પદોનો ક્રમ બદલવાથી) આપણને પદાવલિના અવયવ મળી શકતા નથી. આપણે પદાવલિના પદોનું અવલોકન કરવું જોઈએ અને ભૂલ અને પ્રયત્ન દ્વારા ઇચ્છિત ગોઠવણી કરવી જોઈએ.

6. અનેક પદાવલિઓને (તેના અવયવ મેળવવા માટે) આપણે $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ અને $x^2 + (a + b)x + ab$ સ્વરૂપે ગોઠવી શકીએ છીએ. આવી પદાવલિઓના અવયવ નિત્યસમ I, II, III અને IVની મદદથી સરળતાથી મેળવી શકાય છે.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

7. જે પદાવલિના અવયવ $(x + a)(x + b)$ પ્રકારે મળતા હોય, તેમાં એ ખાસ ધ્યાનમાં લેવું જોઈએ કે પદાવલિના અંતિમ પદ(ab)ના એવા અવયવ શોધો કે જેથી તેનો સરવાળો (કે બાદબાકી) કરવાથી મળતી સંખ્યા xનો સહગુણક બને.

(**નોંધ :** અહીં મળતા અવયવોની નિશાનીમાં પણ કાળજી રાખવી જોઈએ.)

8. સંખ્યાના ભાગાકારની ક્રિયા એ ખરેખર ગુણાકારની વ્યસ્ત ક્રિયા છે. આ જ વિચાર (Idea) બૈજિક પદાવલિના ભાગાકાર માટે પણ ઉપયોગી છે.

9. બહુપદીનો એકપદી વડે ભાગાકાર કરવાના કિસ્સામાં આપણે બહુપદીના દરેક પદનો એકપદી સાથે ભાગાકાર કરીએ છીએ અથવા સામાન્ય અવયવ કાઢવાની રીતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

10. બહુપદીનો બહુપદી વડે ભાગાકાર કરવાના કિસ્સામાં, ભાજ્ય પદાવલિ(Dividend Polynomial)ના દરેક પદનો ભાજક પદાવલિ(Divisor Polynomial)ના દરેક પદ સાથે ભાગાકાર કરીએ એ રીત બરાબર નથી.

    તેના બદલે બંને પદાવલિનાં અવયવ પાડીને ત્યાર બાદ બંનેનો સામાન્ય અવયવ રદ (Cancel) કરવો જોઈએ.

11. અગાઉના પ્રકરણમાં શીખી ગયા તે મુજબ, બૈજિક પદાવલિનો ભાગાકાર એટલે,

    ભાજ્ય પદાવલિ = ભાજક પદાવલિ × ભાગફળ

    વ્યાપક સ્વરૂપે,

    ભાજ્ય = (ભાજક × ભાગફળ) + શેષ

    આ પ્રકરણમાં આપણે એવી જ પદાવલિના ભાગાકારની ચર્ચા કરેલ છે જેમાં શેષ શૂન્ય હોય.

પ્રકરણ 13

આલેખનો પરિચય

13.1 પ્રાસ્તાવિક

શું તમે સમાચારપત્રો, ટેલિવિઝન, સામયિકો, પુસ્તકો વગેરેમાં આલેખો જોયા છે ? આંકડાકીય તથ્યોને દૃશ્ય સ્વરૂપે રજુ કરવાના ઉદ્દેશ્યથી આલેખ તૈયાર કરવામાં આવે છે. આલેખના ઉપયોગથી આંકડાકીય માહિતી ઝડપથી, સરળતાથી અને સ્પષ્ટપણે સમજી શકાય છે. આમ, આલેખ એ પ્રાપ્ત થયેલ માહિતીની દૃશ્ય રજુઆત છે. માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય છે. આમ છતાં, આલેખ દ્વારા રજૂ થતી માહિતી વધુ સરળતાથી સમજી શકાય છે. જ્યારે પ્રાપ્ત માહિતી કોઈ ચલના સાપેક્ષમાં વધે કે ઘટે (દા.ત. બજારમાં તેજી છે કે મંદી) તે જાણવા કે પછી બે માહિતી અથવા તો કોઈ એક માહિતીને તેની ભૂતકાળની માહિતી સાથે સરખાવવા માટે આલેખ ખરેખર ખૂબ જ ઉપયોગી છે. કેટલાક પ્રકારના આલેખ આપણે અગાઉ શીખી ચૂક્યા છીએ.

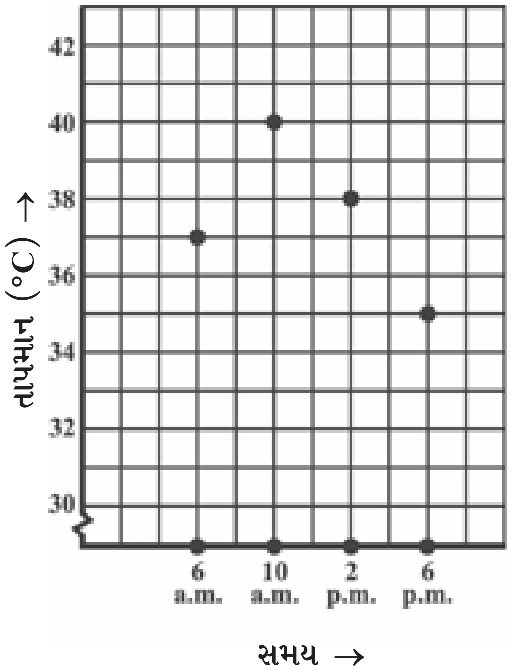
13.1.1 રેખીય આલેખ

નિશ્ચિત સમયગાળામાં સમય સાથે માહિતીમાં થતો સતત ફેરફાર દર્શાવવા રેખીય આલેખ (Line Graph) વપરાય છે.

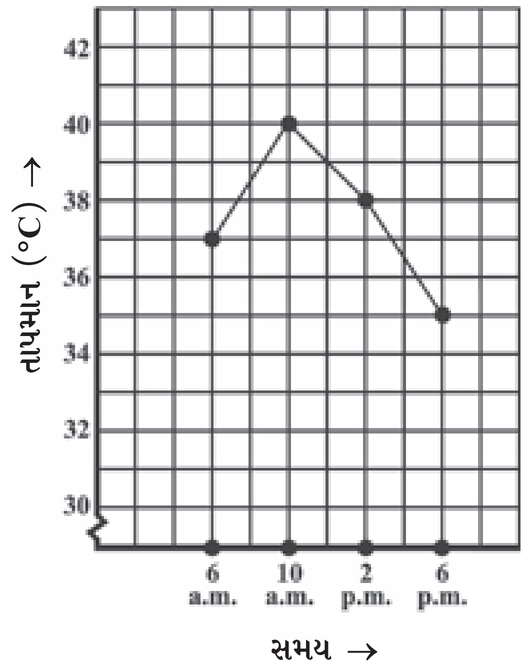
જ્યારે રેણુ બિમાર હતી ત્યારે ડૉક્ટરે દર ચાર કલાકે તેણીના શરીરનું તાપમાન નોંધેલ. આ માહિતી આલેખ સ્વરૂપે રજુ કરેલ છે. (જે આકૃતિ 13.1 અને આકૃતિ 13.2માં બતાવેલ છે). આપણે આ આલેખને ''સમય વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ'' કહી શકીએ. આકૃતિ 13.1 અને આકૃતિ 13.2 એ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ માહિતીની ચિત્રાત્મક રજુઆત છે.

સમય	6 a.m.	10 a.m.	2 p.m.	6 p.m.
તાપમાન (°C)	37	40	38	35

આલેખમાં આડી રેખાને સામાન્ય રીતે X અક્ષ કહે છે. જ્યારે તાપમાન લેવામાં આવેલ હતું તે સમય X અક્ષ પર બતાવેલ છે. વળી, આલેખમાં ઊભી રેખાને સામાન્ય રીતે Y અક્ષ કહે છે. અહીં Y અક્ષ પર શાનું માપ લેવામાં આવેલ છે ?



આકૃતિ 13.1
આપેલ માહિતીના દરેક જોડકાને આલેખ પર બિંદુ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 13.2
માહિતીનાં જોડકાઓ દ્વારા પ્રાપ્ત બિંદુઓને રેખાખંડથી જોડતા પરિણામ સ્વરૂપે રેખીય આલેખ પ્રાપ્ત થાય છે.

આલેખ તમને શું કહે છે? અહીં આલેખમાં આપણે તાપમાનમાં થતો ફેરફાર જોઈ શકીએ છીએ. આકૃતિ 13.1 પરથી આપણે કહી શકીએ કે 10 a.m. (ante meridiem) વાગ્યે મહત્તમ તાપમાન હતું અને પછી 6 p.m. (post meridiem) સુધી તાપમાનમાં સતત ઘટાડો થતો રહેલ. અહીં આપણે નોંધી શકીએ કે 6 a.m. થી 10 a.m.ના સમયગાળામાં તાપમાનમાં 3°C (40°C - 37°C) જેટલો વધારો થયેલ.

અહીં 8 a.m. વાગ્યે તાપમાનની કોઈ નોંધ કરવામાં આવેલ ન હતી. છતાં તમે આલેખના આધારે કહી શકશો કે ત્યારે તાપમાન 37°C થી વધારે હતું. (કેવી રીતે ? વિચારો.)

ઉદાહરણ 1 : ("દેખાવ અથવા પ્રદર્શન" આધારિત આલેખ)

આકૃતિ 13.3માં આપેલા બે આલેખ વર્ષ 2007માં જુદી-જુદી દસ મેચ દરમિયાન બે બલ્લેબાજ (બૅટ્સમેન) A અને Bએ બનાવેલા રન દર્શાવે છે. આલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) બંને અક્ષ પર શું માહિતી આપેલ છે ?

(ii) કઈ રેખા બૅટ્સમેન Aના રનનો સ્કોર બતાવે છે ?

(iii) વર્ષ 2007માં કઈ મૅચમાં બંને બૅટ્સમેને સરખા રનનો સ્કોર કર્યો હતો ?

(iv) બંને બૅટ્સમેનમાંથી કોણ વિશ્વાસપાત્ર છે ? (શા માટે તમે આમ નિર્ણય કર્યો ?)

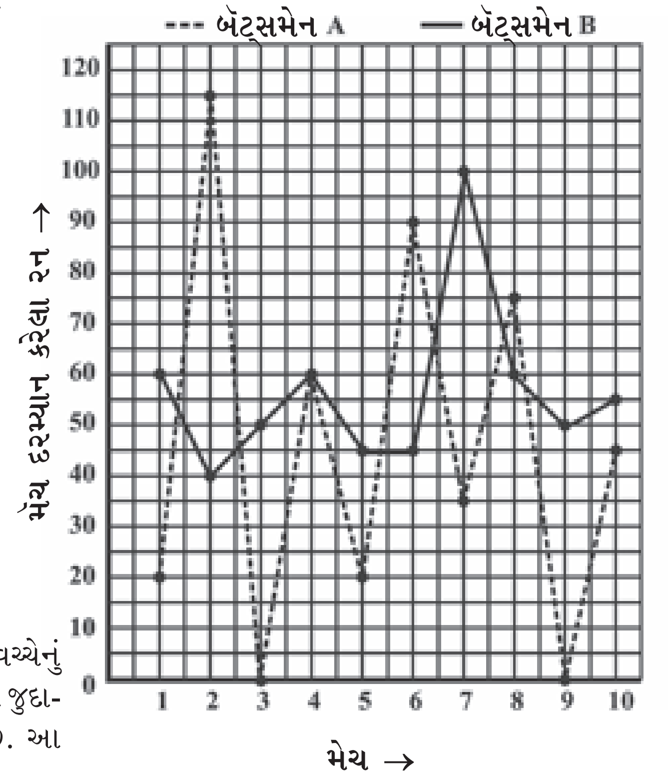
ઉકેલ :

(i) વર્ષ 2007 દરમિયાન રમાયેલ મેચ X અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. Y અક્ષ પર દરેક મૅચમાં બંને ખેલાડીએ બનાવેલા કુલ રન દર્શાવેલ છે.

(ii) બેટ્સમેન A દ્વારા બનાવવામાં આવેલ રનના આલેખને તૂટક રેખા વડે દર્શાવેલ છે. (આ બાબત આલેખની ઉપરની બાજુએ પહેલેથી જ દર્શાવેલ છે.)

(iii) ચોથી મૅચ દરમિયાન બંને બૅટ્સમેને સમાન રન (60 રન) બનાવેલ છે. (બંને આલેખ આ બિંદુ પર ભેગા થતાં હોવાથી આપણે આમ કહી શકીએ.)

(iv) બૅટ્સમેન Aએ એક મૅચમાં સૌથી વધુ રન બનાવ્યા છે. પણ ઓછા રનના ખાડા પણ આલેખમાં જોવા મળે છે. બૅટ્સમેન Aની રમતમાં સાતત્ય નથી. જ્યારે બીજી તરફ બૅટ્સમેન B એ કોઈ મૅચમાં 40 થી ઓછા રન કર્યા નથી. આમ છતાં તેનો મહત્તમ સ્કોર 100 રન છે. જે બૅટ્સમેન Aના 115 રન કરતાં ઓછા છે. ઉપરાંત ખેલાડી A બે મૅચમાં શૂન્ય રન સાથે આઉટ થયેલ છે અને પાંચ મૅચમાં 40 થી ઓછો સ્કોર કરેલ છે. તેને કારણે ખેલાડી Aના આલેખમાં ઘણા મોટા ઉતાર-ચઢાવ છે તેના સાપેક્ષે ખેલાડી Bની રમતમાં વધુ સાતત્ય હોવાથી તે વધુ વિશ્વાસપાત્ર બૅટ્સમેન છે.



આકૃતિ 13.3

ઉદાહરણ 2 :

એક કાર શહેર P થી શહેર Q તરફ યાત્રા કરે છે. બંને શહેર વચ્ચેનું અંતર 350 કિલોમીટર છે. આકૃતિ 13.4માં આપેલ આલેખમાં જુદા-જુદા સમયે કાર અને શહેર P વચ્ચેનું અંતર આપેલ છે. આ આલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) બંને અક્ષો પર કઈ માહિતી આપેલ છે ?

(ii) કારની યાત્રા ક્યારે અને ક્યાંથી શરુ થઈ ?

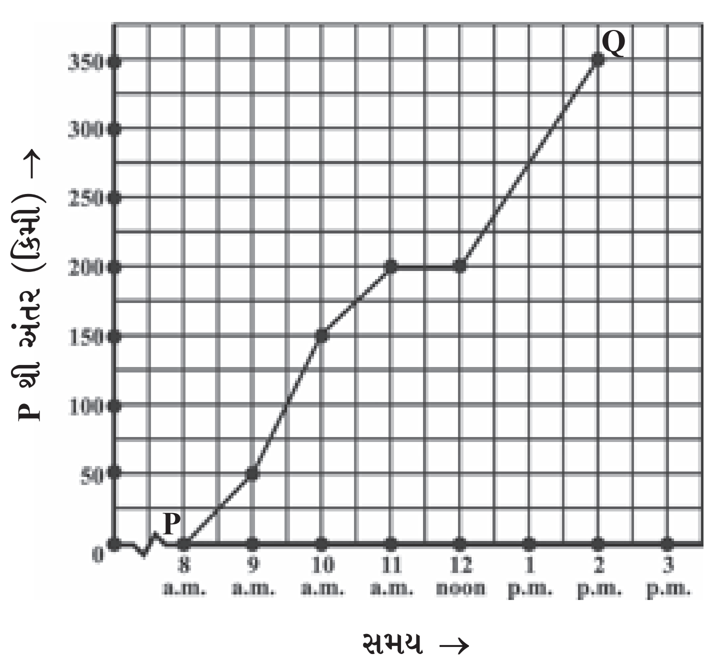
(iii) પ્રથમ એક કલાકમાં કાર કેટલી દૂર ગઈ ?

(iv) બે કલાક બાદ અને ત્રણ કલાક બાદ કાર કેટલે દૂર પહોંચી હતી ?

(v) શું પ્રથમ ત્રણ કલાકની ઝડપ સરખી રહી હતી ? આ તમે કેમ જાણ્યું ?

(vi) શું કાર કેટલાક સમય માટે કોઈ સ્થળે ઊભી રહેલ ? તમારા જવાબનો તર્ક રજુ કરો.

(vii) કાર ક્યારે શહેર Q પહોંચશે ?



આકૃતિ 13.4

ઉકેલ :

(i) x અક્ષ પર સમય દર્શાવેલ છે. y અક્ષ પર શહેર Pથી કારનું અંતર દર્શાવેલ છે.

(ii) કાર શહેર Pથી યાત્રાની શરૂઆત સવારે 8 વાગ્યે કરે છે.

(iii) પ્રથમ કલાક દરમિયાન કારે 50 કિલોમીટરનું અંતર કાપેલું હતું. [આ બાબત આ મુજબ સમજી શકાય. સવારે 8 વાગ્યે શહેર Pથી યાત્રા શરૂ કરી હતી અને સવારે 9 વાગ્યે તે 50 કિમી પર પહોંચેલ હતી (આલેખમાં આ બાબત જુઓ). તેથી કહી શકાય કે પ્રથમ કલાક દરમિયાન એટલે કે 8 a.m. અને 9 a.m.ની વચ્ચે કાર દ્વારા 50 કિમીની યાત્રા થઈ હતી.]

(iv) કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર

(a) બીજા કલાકે (એટલે કે 9 a.m થી 10 a.m. દરમિયાન) 100 કિમી (150-50)

(b) ત્રીજા કલાકે (એટલે કે 10 a.m.થી 11 a.m. દરમિયાન) 50 કિમી (200-150)

(v) પ્રશ્ન (iii) અને (iv)ના જવાબના આધારે આપણે કહી શકીએ કે કારની ઝડપ સમગ્ર સમય દરમિયાન સરખી રહી ન હતી (આલેખ એ પણ બતાવે છે કે ઝડપ કઈ રીતે બદલી).

(vi) આલેખમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે કાર સવારે 11 વાગ્યે અને 12 વાગ્યે પણ P શહેરથી 200 કિમી દૂર જ હતી. આ સમય દરમિયાન કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર આલેખની અંદર સમક્ષિતિજ રેખા દ્વારા પ્રદર્શિત થાય છે. આ બાબત પણ એ પુષ્ટિ કરે છે કે આ સમય દરમિયાન કારે યાત્રા કરેલ નથી, કાર ઊભી રહેલ હતી.

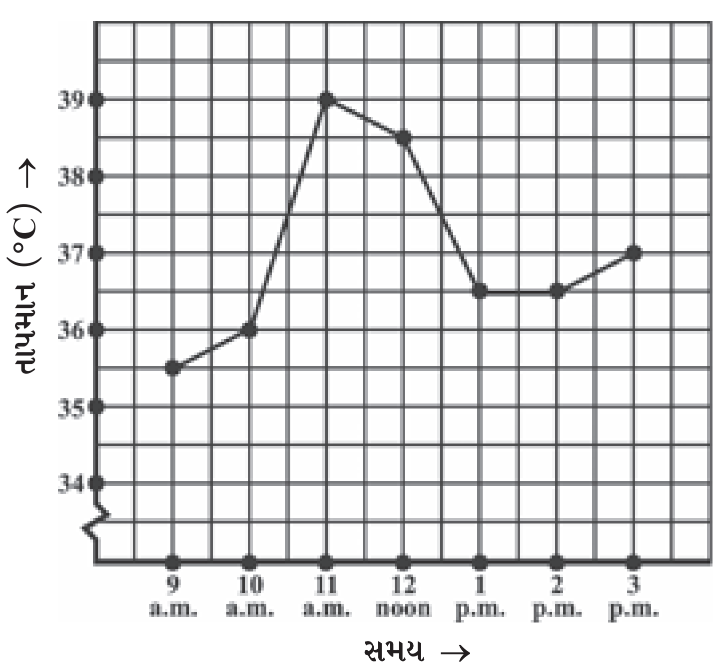
(vii) બપોરે 2:00 વાગ્યે કાર Q શહેર પર પહોંચી હશે.

સ્વાધ્યાય 13.1

1. નીચે આપેલ આલેખ હૉસ્પિટલમાં એક દર્દીનું દર કલાકે લીધેલ તાપમાન દર્શાવે છે. તેના પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(a) બપોરે 1 વાગ્યે દર્દીના શરીરનું તાપમાન શું હતું ?

(b) દર્દીના શરીરનું તાપમાન 38.5°C ક્યારે હતું ?



(c) આ સમગ્ર સમય દરમિયાન દર્દીનું તાપમાન બે વખત સરખું રહ્યું હતું. આ બન્ને સમય કયા હતા ?

(d) બપોરના 1:30 વાગ્યે દર્દીનું તાપમાન શું હતું ? આ તારણ પર તમે કઈ રીતે પહોંચ્યા ?

(e) સમયના કયા ગાળામાં દર્દીનું તાપમાન વધી રહ્યાનું જણાતું હતું ?

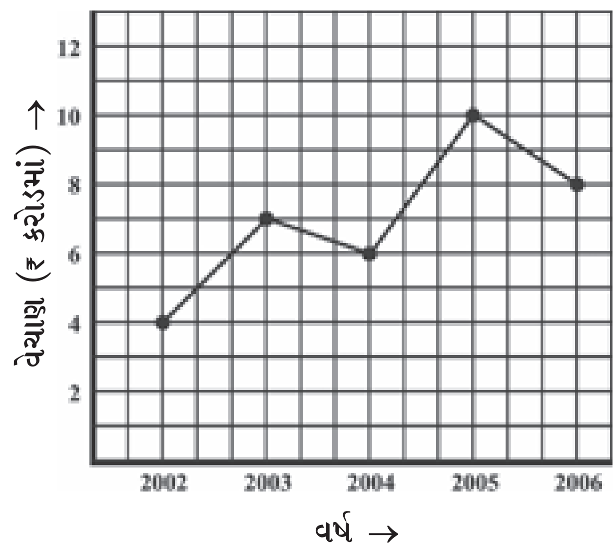
2. નીચે આપેલા રેખીય આલેખમાં એક ઉત્પાદક કંપનીએ જુદા-જુદા વર્ષમાં કરેલ વેચાણ દર્શાવેલ છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :

(a) (i) વર્ષ 2002 અને (ii) વર્ષ 2006માં કેટલું વેચાણ થયું હતું ?

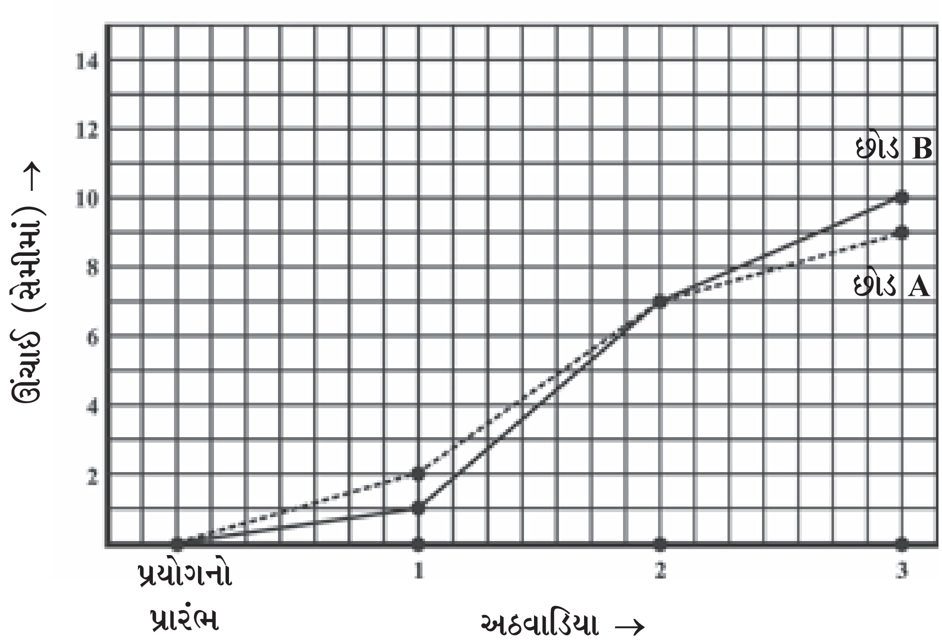
(b) (i) વર્ષ 2003 અને (ii) વર્ષ 2005માં કેટલું વેચાણ થયું હતું ?

(c) વર્ષ 2002 અને વર્ષ 2006નાં વેચાણ વચ્ચે કેટલો તફાવત હતો ?

(d) કયા વર્ષના વેચાણનો તફાવત તેના અગાઉના વર્ષની સરખામણીમાં મહત્તમ હતો ?



3. વનસ્પતિશાસ્ત્રના એક પ્રયોગમાં બે છોડ A અને Bને પ્રયોગશાળાની સમાન પરિસ્થિતિમાં ઉછેરવામાં આવ્યા. તેમની ઊંચાઈને અઠવાડિયાના અંતે માપવામાં આવતી હતી. આમ, ત્રણ અઠવાડિયા સુધી પ્રયોગ કરવામાં આવેલો. પ્રયોગના પરિણામને આલેખમાં દર્શાવેલ છે.



(a) (i) 2 સપ્તાહ પછી (ii) 3 સપ્તાહ પછી છોડ Aની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?

(b) (i) 2 સપ્તાહ પછી (ii) 3 સપ્તાહ પછી છોડ Bની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?

(c) ત્રીજા સપ્તાહ દરમિયાન છોડ Aની ઊંચાઈ કેટલી વધી ?

(d) બીજા સપ્તાહના અંતથી ત્રીજા સપ્તાહનાં અંત સુધીમાં છોડ Bની ઊંચાઈ કેટલી વધી ?

(e) કયા સપ્તાહમાં છોડ Aની ઊંચાઈ સૌથી વધુ વધી ?

(f) કયા સપ્તાહમાં છોડ Bની ઊંચાઈ સૌથી ઓછી વધી ?

(g) શું કોઈ એક સપ્તાહમાં બન્ને છોડની ઊંચાઈ સરખી હતી ? સ્પષ્ટ કરો.

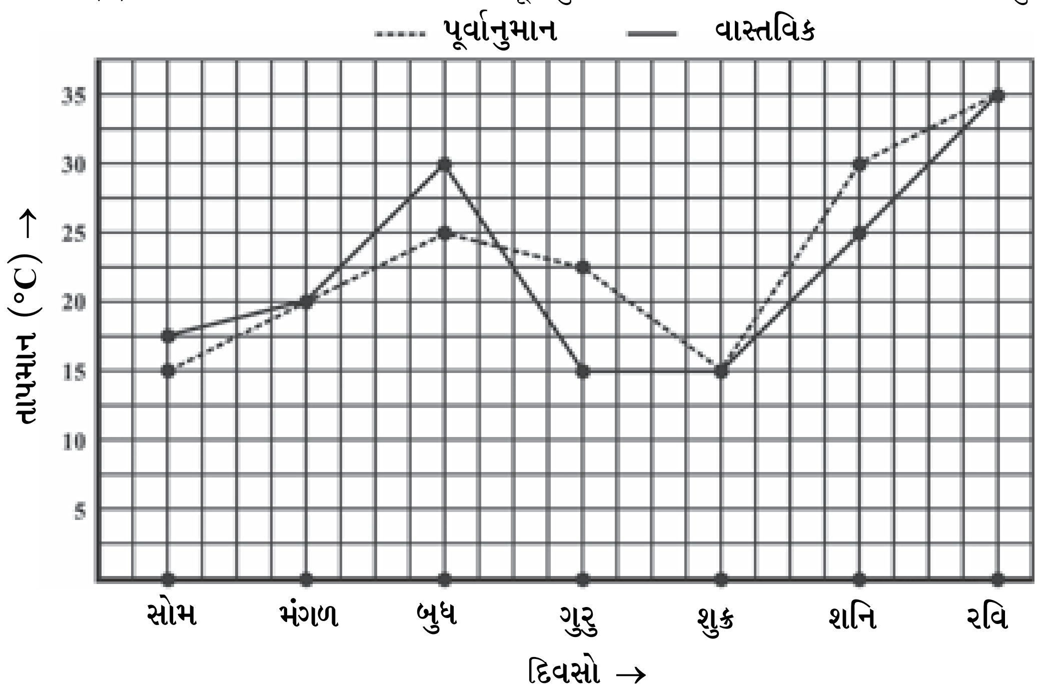
4. નીચે આપેલા આલેખમાં કોઈ એક સપ્તાહના દરેક દિવસ માટે પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન અને વાસ્તવિક તાપમાન દર્શાવેલ છે.

(a) કયા દિવસે પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન અને વાસ્તવિક તાપમાન સમાન હતા ?

(b) સપ્તાહ દરમિયાન પૂર્વાનુમાન કરેલ મહત્તમ તાપમાન કેટલું હતું ?

(c) સપ્તાહ દરમિયાન લઘુત્તમ વાસ્તવિક તાપમાન કેટલું હતું ?

(d) કયા દિવસે વાસ્તવિક તાપમાન અને પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન વચ્ચેનો તફાવત સૌથી વધુ હતો ?



5. નીચેના કોષ્ટકના આધારે રૈખિક આલેખ દોરો :

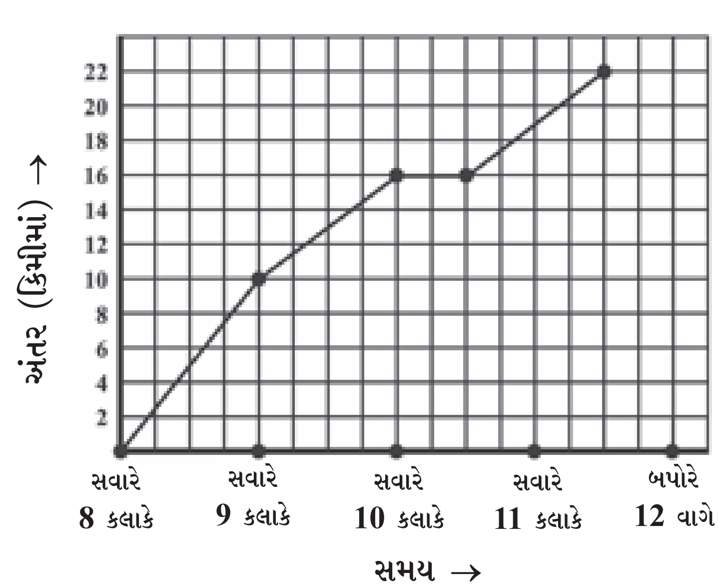
(a) જુદા-જુદા વર્ષોમાં કોઈ પર્વતીય શહેરમાં કેટલા દિવસો માટે હિમવર્ષા થયેલ તે અત્રે દર્શાવેલ છે.

વર્ષ	2003	2004	2005	2006
દિવસોની સંખ્યા	8	10	5	12

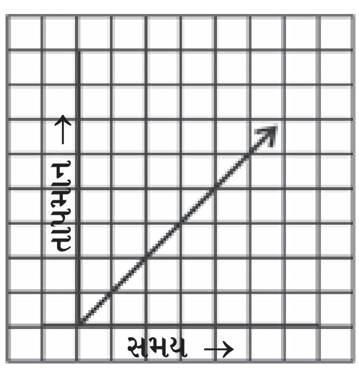
(b) એક ગામની અંદર જુદા-જુદા વર્ષમાં પુરુષ અને સ્ત્રીની વસ્તી (હજારમાં) આ મુજબ છે :

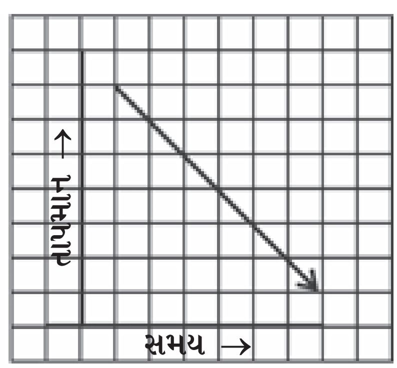
વર્ષ	2003	2004	2005	2006	2007
પુરુષોની સંખ્યા	12	12.5	13	13.2	13.5
સ્ત્રીઓની સંખ્યા	11.3	11.9	13	13.6	12.8

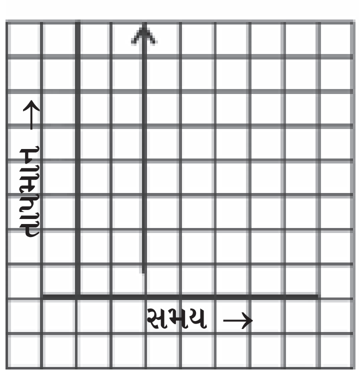
6. એક ટપાલી કોઈ નગરથી તે જ નગરના એક ઉપનગરમાં એક વેપારીને પાર્સલ પહોંચાડવા સાયકલ લઈને જાય છે. જુદા-જુદા સમયે નગરથી તેનું અંતર નીચેના આલેખમાં દર્શાવેલ છે.
   (a) x અક્ષ પર સમય દર્શાવવા માટે શું પ્રમાણમાપ લેવામાં આવ્યું છે ?
   (b) ટપાલીએ આ મુસાફરી માટે કેટલો સમય લીધો ?
   (c) નગરથી વેપારીનું સ્થળ કેટલું દૂર છે ?
   (d) શું ટપાલી તેના માર્ગમાં ક્યાંક થોભ્યો હતો ? વિગતે સમજાવો.
   (e) કયા સમયગાળામાં તેણે સૌથી ઝડપી સવારી કરી ?

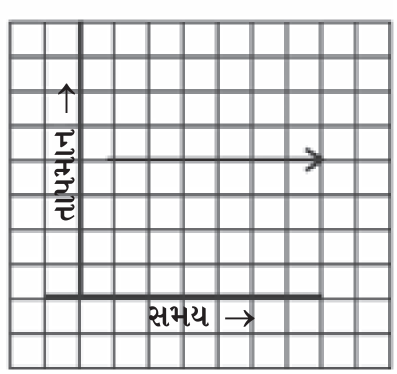


7. નીચે આપેલા આલેખોમાંથી કયા આલેખો સમય અને તાપમાન માટે શક્ય (સંભવ) છે. તમારો જવાબ સમજાવો.

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


13.2 આલેખના કેટલાક ઉપયોગ

દૈનિક જીવનમાં તમે કદાચ જોયું હશે કે સુવિધાઓનો તમે જેટલો વધારે ઉપયોગ કરો છો તેની કિંમત પણ તમારે વધારે ચૂકવવી પડે છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે જો વીજળીનો વધુ ઉપયોગ કરશો તો વીજળીનું બિલ પણ વધારે જ ચૂકવવું પડશે અને જો તમે વીજળી ઓછી વાપરશો તો વીજળીનો ખર્ચ પણ ઘણો ઓછો આવશે. અહીં આ ઉદાહરણમાં તમે જોઈ શકો છો કે એક રાશિ બીજી રાશિને અસર કરે છે. વીજળીના બિલની રકમને વીજળીના વપરાશનો જથ્થો અસર કરે છે. અહીં આપણે કહી શકીએ કે વીજળીનો જથ્થો એ એક સ્વતંત્ર ચલ છે (અથવા કેટલીક વખત અંકુશિત ચલ છે) અને વીજળીનાં બિલની રકમ પરતંત્ર ચલ છે. આવા ચલો વચ્ચેનો સંબંધ આપણે આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકીએ.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

એક કારની પેટ્રોલની ટાંકી ભરવા માટે તમારે કેટલી રકમ ચૂકવવી પડશે ? તેનો આધાર તમે કેટલાં લિટર પેટ્રોલ ખરીદો છો તેના પર રહેલો છે. જે અહીં સ્વતંત્ર ચલ છે. આ બાબતે વિચારો.

ઉદાહરણ 3 : (માત્રા અને મૂલ્ય)

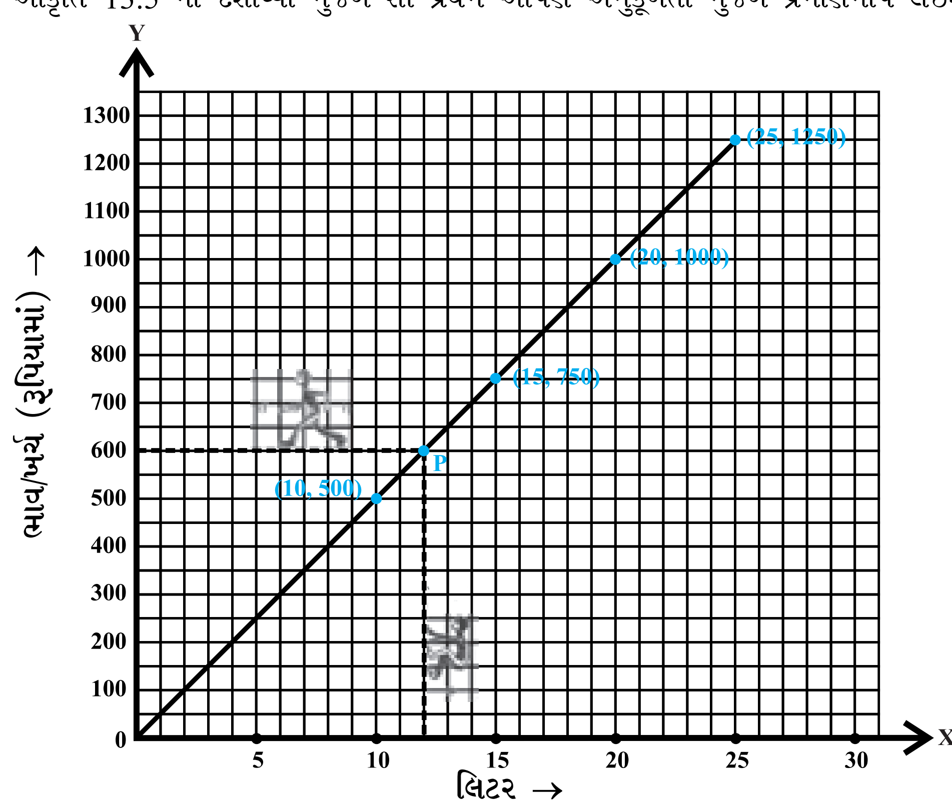
નીચેના કોષ્ટકમાં પેટ્રોલની માત્રા અને તેની કિંમત આપવામાં આવી છે :

પેટ્રોલની માત્રા (લિટરમાં)	10	15	20	25
પેટ્રોલનું મૂલ્ય (રૂપિયામાં)	500	750	1000	1250

આ આંકડાઓ દર્શાવવા આલેખ દોરો.

ઉકેલ :

(i) આકૃતિ 13.5 માં દર્શાવ્યા મુજબ સૌ પ્રથમ આપણે અનુકૂળતા મુજબ પ્રમાણમાપ લઈશું.



આકૃતિ 13.5

(ii) સમક્ષિતિજ અક્ષ (x અક્ષ) પર પેટ્રોલની માત્રા દર્શાવીશું.

(iii) y અક્ષ પર પેટ્રોલની કિંમત દર્શાવીશું.

(iv) બિંદુઓ (10, 500), (15, 750), (20, 1000) અને (25, 1250)ને આલેખ પર અંકિત કરો.

(v) અંકિત કરેલા આ બિંદુઓને જોડો.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આ આલેખ રેખા સ્વરૂપે છે. (તે એક રૈખિક આલેખ છે.) આ આલેખ ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી શા માટે પસાર થાય છે ? આ બાબતે વિચારો.

આ આલેખ આપણને કેટલીક બાબતો(તથ્યો)નાં અનુમાન કરવામાં મદદરૂપ થઈ શકે છે. ધારો કે આપણે 12 લિટર પેટ્રોલ ખરીદવા માટે કેટલી રકમ જોઈશે તે જાણવા ઇચ્છીએ છીએ. આ માટે આપણે x અક્ષ પર 12 લિટર પાસેથી ઉર્ધ્વ દિશામાં જઈશું જેથી આલેખ પરના P બિંદુ પર પહોંચીશું. ત્યાંથી y અક્ષ તરફ સમક્ષિતિજ (સીધી) દિશામાં જતા આપણે y અક્ષ પર પહોંચશું, જ્યાં ₹ 600 મૂલ્ય દર્શાવે છે. આથી આપણે આ રીતે આલેખનો ઉપયોગ કરીને 12 લિટર પેટ્રોલ માટે આપણે ₹ 600 ચૂકવવા પડ્યા હશે તેનું અનુમાન કરી શકીએ છીએ.

આ આલેખ એક એવી પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે કે જેમાં બે માત્રા એકબીજાને સમચલનમાં છે. (કઈ રીતે ? વિચારો) આવી પરિસ્થિતિમાં આલેખ હંમેશાં રૈખિક હોય છે.

પ્રયત્ન કરો

ઉપરનાં ઉદાહરણનાં આલેખનો ઉપયોગ કરીને જણાવો કે ₹ 800માં કેટલી માત્રામાં પેટ્રોલ ખરીદી શકાય ?

ઉદાહરણ 4 : (મુદ્દલ અને સાદું વ્યાજ)

એક બૅંક વરિષ્ઠ નાગરિકોને તેમનાં રોકાણ પર 10% સાદું વ્યાજ આપે છે. જમા કરાવેલ મુદ્દલ અને તેના પર પ્રાપ્ત થનાર સાદા વ્યાજના સંબંધને દર્શાવવા એક આલેખ દોરો. પ્રાપ્ત આલેખના આધારે નીચેની બાબતો શોધો.

(a) ₹ 250નાં રોકાણ પર પ્રાપ્ત થનાર વાર્ષિક વ્યાજ શોધો.

(b) ₹ 70 વાર્ષિક સાદું વ્યાજ મેળવવા માટે કેટલી મુદ્દલનું રોકાણ કરવું પડશે ?

ઉકેલ :

જમા રાશિ	એક વર્ષ માટે સાદું વ્યાજ
₹ 100	₹ $\frac{100 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 10
₹ 200	₹ $\frac{200 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 20
₹ 300	₹ $\frac{300 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 30
₹ 500	₹ $\frac{500 \times 1 \times 10}{100}$ = ₹ 50
₹ 1000	₹ 100

આલેખ દોરવા માટેનાં પગલાં :

1. અંકિત કરવાની થતી જમા રાશિ માટે સાદા વ્યાજની ગણતરી કરો.
2. x અક્ષ અને y અક્ષ પર લેવાની થતી રાશિઓ નક્કી કરો.
3. યોગ્ય પ્રમાણમાપ પસંદ કરો.
4. બિંદુઓ અંકિત કરો.
5. બિંદુઓને જોડો.

આપણને નીચે મુજબની કિંમત ધરાવતું કોષ્ટક પ્રાપ્ત થશે.

જમા રાશિ (₹માં)	100	200	300	500	1000
વાર્ષિક સાદું વ્યાજ (₹માં)	10	20	30	50	100

(i) પ્રમાણમાપ : 1 એકમ = ₹ 100 (x અક્ષ માટે)
1 એકમ = ₹ 10 (y અક્ષ માટે)

(ii) જમા કરાવેલ મુદ્દલને x અક્ષ પર દર્શાવો.

(iii) પ્રાપ્ત થતા સાદા વ્યાજને y અક્ષ પર દર્શાવો.

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) વગેરે બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો.

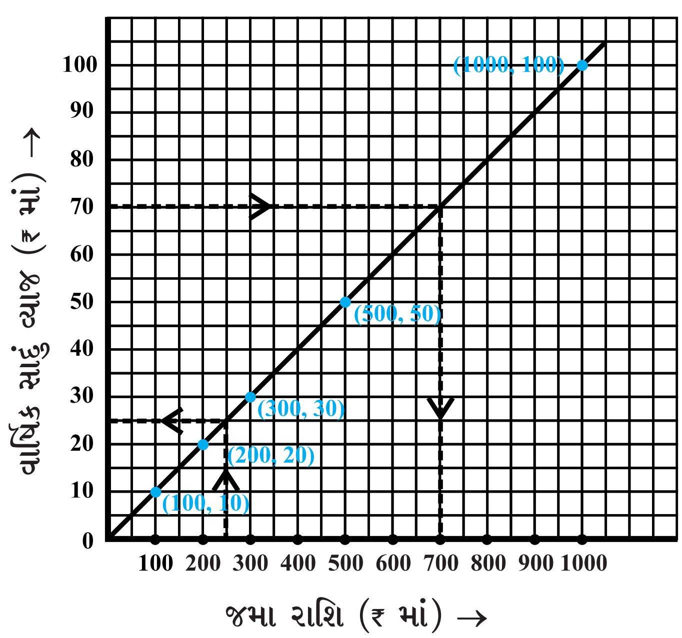
(v) બિંદુઓને જોડો. આકૃતિ 13.6 માં દર્શાવ્યા મુજબનો આલેખ મળશે, જે રેખા સ્વરૂપે છે.

(a) x અક્ષ પર ₹ 250 મુદ્દલને અનુરૂપ y અક્ષ પર ₹ 25 સાદું વ્યાજ પ્રાપ્ત થાય છે.

(b) y અક્ષ પર ₹ 70 સાદું વ્યાજ મેળવવા આનુષંગિક x અક્ષ પર ₹ 700ની રકમનું મુદ્દલ હોવું જોઈએ.

પ્રયત્ન કરો

શું ઉદાહરણ 4 એ સમચલનનો કિસ્સો છે ?



આકૃતિ 13.6

ઉદાહરણ 5 : (સમય અને અંતર)

અજીત 30 કિમી/કલાકની ઝડપે સતત સ્કૂટર ચલાવી શકે છે. આ પરિસ્થિતિ માટે સમય → અંતરનો આલેખ દોરો. આ આલેખનો ઉપયોગ કરી નીચેની બાબતો શોધો :

(i) 75 કિમી અંતર કાપવા માટે અજીત કેટલો સમય લેશે ? (ii) $3\frac{1}{2}$ કલાકમાં અજીતે કાપેલું અંતર શોધો.

ઉકેલ :

મુસાફરીના કલાક	કાપેલું અંતર
1 કલાક	30 કિમી
2 કલાક	2 × 30 કિમી = 60 કિમી
3 કલાક	3 × 30 કિમી = 90 કિમી
4 કલાક	4 × 30 કિમી = 120 કિમી આવી જ રીતે આગળ

આ રીતે આપણને માહિતીનું કોષ્ટક મળશે.

સમય (કલાકમાં)	1	2	3	4
કાપેલ અંતર (કિમીમાં)	30	60	90	120

(i) પ્રમાણમાપ : (આકૃતિ 13.7)

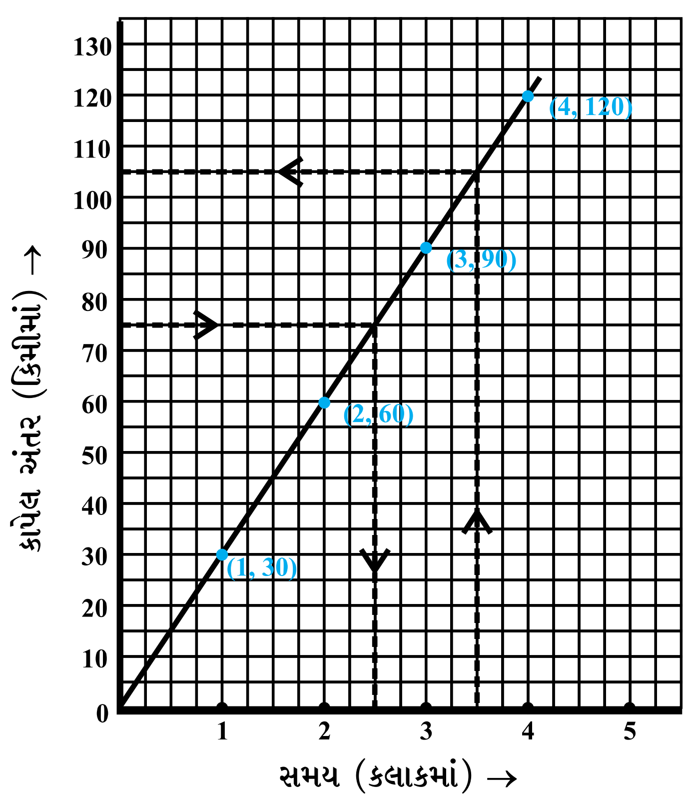
x અક્ષ માટે : 2 એકમ = 1 કલાક

y અક્ષ માટે : 1 એકમ = 10 કિમી

(ii) x અક્ષ પર સમય દર્શાવશું.

(iii) y અક્ષ પર અંતર દર્શાવશું.

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90), (4, 120) બિંદુઓને આલેખમાં અંકિત કરો.



આકૃતિ 13.7

(v) ઉપરોક્ત બિંદુઓને જોડતા આપણને રૈખિક આલેખ પ્રાપ્ત થશે.

(a) y અક્ષ પર 75 કિમી અંતર લેતાં તેને અનુરૂપ x અક્ષ પર 2.5 કલાક સમય પ્રાપ્ત થાય છે. આમ, 75 કિમી અંતર કાપવા માટે 2.5 કલાકનો સમય લાગશે.

(b) x અક્ષ પર $3\frac{1}{2}$ કલાક લેતા તેને અનુરૂપ y અક્ષ પર 105 કિમી અંતર પ્રાપ્ત થશે. આમ, $3\frac{1}{2}$ કલાકમાં અજીત 105 કિમી અંતર કાપશે.

સ્વાધ્યાય 13.2

1. યોગ્ય પ્રમાણમાપનો ઉપયોગ કરી નીચેના કોષ્ટકના આધારે આલેખ દોરો.

(a) સફરજનના ભાવ (કિંમત)

સફરજનની સંખ્યા	1	2	3	4	5
કિંમત (₹ માં)	5	10	15	20	25

(b) કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર

સમય (કલાકમાં)	6 a.m.	7 a.m.	8 a.m.	9 a.m.
અંતર (કિમીમાં)	40	80	120	160

(i) 7:30 a.m. થી 8:00 a.m. દરમિયાન કારે કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?

(ii) કાર દ્વારા યાત્રા શરૂ કર્યાના સ્થળથી 100 કિમી દૂર પહોંચવા માટે કેટલો સમય લાગ્યો હશે ?

(c) એક વર્ષ માટે જમા કરાવેલ મુદ્દલ માટે વ્યાજ આ મુજબ છે :

જમા રકમ (₹માં)	1000	2000	3000	4000	5000
સાદું વ્યાજ (₹માં)	80	160	240	320	400

(i) શું આ આલેખ ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી પસાર થશે ?

(ii) આલેખનો ઉપયોગ કરી ₹ 2500નું વાર્ષિક સાદું વ્યાજ મેળવો.

(iii) દર વર્ષે ₹ 280 વ્યાજ મેળવવા માટે કેટલી રકમ મુદ્દલ તરીકે જમા કરાવવી પડશે ?

2. નીચેના કોષ્ટક માટે આલેખ દોરો :

(i)

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	2	3	3.5	5	6
પરિમિતિ (સેમીમાં)	8	12	14	20	24

શું આ રૈખિક આલેખ છે ?

(ii)

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	2	3	4	5	6
ક્ષેત્રફળ (ચોરસ સેમીમાં)	4	9	16	25	36

શું આ રૈખિક આલેખ છે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. માહિતીની રજૂઆત આલેખ સ્વરૂપે કરવાથી તે સરળતાથી સમજાય છે.
2. સમયના નિશ્ચિત ગાળામાં પરિવર્તન પામતી માહિતીને દર્શાવવા રેખા આલેખનો ઉપયોગ થાય છે.
3. જ્યારે રેખા આલેખ એક અખંડિત/પૂર્ણ રેખા સ્વરૂપે મળે છે ત્યારે તેને રૈખિક આલેખ કહેવામાં આવે છે.
4. આલેખપત્ર પર કોઈ પણ બિંદુની સ્થિતિ સુનિશ્ચિત કરવા માટે આપણને x નિર્દેશાંક અને y નિર્દેશાંકની જરૂર પડે.
5. એક સ્વતંત્ર ચલ અને પરતંત્ર ચલ વચ્ચેનો સંબંધ આલેખ દ્વારા પ્રદર્શિત કરી શકાય.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i) 1 એ ગુણાકારનો એકમ ઘટક છે. (ii) ક્રમનો નિયમ (iii) વ્યસ્ત સંખ્યા

2. જૂથનો ગુણધર્મ **3.** સંમેય સંખ્યા

સ્વાધ્યાય 2.1

1. $x = 18$ **2.** $t = -1$ **3.** $x = -2$ **4.** $z = \frac{3}{2}$ **5.** $x = 5$

6. $x = 0$ **7.** $x = 40$ **8.** $x = 10$ **9.** $y = \frac{7}{3}$ **10.** $m = \frac{4}{5}$

સ્વાધ્યાય 2.2

1. $x = \frac{27}{10}$ **2.** $n = 36$ **3.** $x = -5$ **4.** $x = 8$ **5.** $t = 2$

6. $m = \frac{7}{5}$ **7.** $t = -2$ **8.** $y = \frac{2}{3}$ **9.** $z = 2$ **10.** $f = 0.6$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2

(d) 2 (e) 1

2. સમાન બાજુ અને સમાન ખૂણા ધરાવતો બહુકોણ

(i) સમબાજુ ત્રિકોણ (ii) ચોરસ (iii) નિયમિત ષટ્કોણ

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (a) $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ (b) $360^\circ - 310^\circ = 50^\circ$

2. (a) $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ (b) $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

3. $\frac{360}{24} = 15$ (બાજુઓ) **4.** બાજુઓની સંખ્યા $= 24$

5. (a) ના, (22 એ 360નો ભાજક નથી.)

(b) ના, (કારણ કે દરેક બહિષ્કોણ $180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$, જે 360°નો ભાજક નથી.)

6. (a) સમબાજુ ત્રિકોણ એ 3 બાજુ ધરાવતો નિયમિત બહુકોણ છે, જેના અંતઃકોણનું માપ ઓછામાં ઓછું = 60°

(b) ઉપરોક્ત (a) પરથી મોટામાં મોટા બહિષ્કોણનું માપ = 120°

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) BC (સામસામેની બાજુઓ સમાન) (ii) $\angle DAB$ (સામસામેના ખૂણા સમાન/એકરૂપ હોય)

(iii) OA (વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે)

(iv) 180° ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ હોવાથી, અંતઃસંમુખકોણ)

2. (i) $x = 80^\circ$, $y = 100^\circ$, $z = 80^\circ$ (ii) $x = 130^\circ$, $y = 130^\circ$, $z = 130^\circ$

(iii) $x = 90^\circ$, $y = 60^\circ$, $z = 60^\circ$ (iv) $x = 100^\circ$, $y = 80^\circ$, $z = 80^\circ$

(v) $y = 112^\circ$, $x = 28^\circ$, $z = 28^\circ$

3. (i) બની શકે પણ હંમેશાં જરૂરી નહીં.

(ii) ના (સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ એકરૂપ હોય છે, પરંતુ અહીં $AD \neq BC$)

(iii) ના (સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા એકરૂપ હોય છે, પરંતુ અહીં, $\angle A \neq \angle C$)

4. પતંગ (ઉદાહરણ તરીકે) **5.** 108°, 72° **6.** દરેક કાટખૂણો હોય

7. $x = 110^\circ$, $y = 40^\circ$, $z = 30^\circ$

8. (i) $x = 6$, $y = 9$ (ii) $x = 3$, $y = 13$ **9.** $x = 50^\circ$

10. $\overline{NM} \parallel \overline{KL}$ (અંતઃ સંમુખકોણોનો સરવાળો 180° હોય) આથી, KLMN એ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

11. 60° **12.** $\angle P = 50^\circ$ $\angle S = 90^\circ$

સ્વાધ્યાય 3.4

1. (b), (c), (f), (g), (h) વિધાનો ખરાં છે બાકીનાં વિધાનો ખોટા છે.

2. (a) સમબાજુ, ચોરસ (b) ચોરસ, લંબચોરસ

3. (i) ચોરસને ચાર બાજુ છે; તેથી તે ચતુષ્કોણ છે.

(ii) ચોરસની સામસામેની બાજુની બન્ને જોડ સમાંતર હોય છે; તેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iii) ચોરસ એ ચારે બાજુઓ સમાન હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે; તેથી સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iv) ચોરસ એ ચારે ખૂણાઓ કાટખૂણા હોય તેવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે; તેથી તે લંબચોરસ છે.

4. (i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, ચોરસ, લંબચોરસ

(ii) સમબાજુ, ચોરસ (iii) ચોરસ, લંબચોરસ

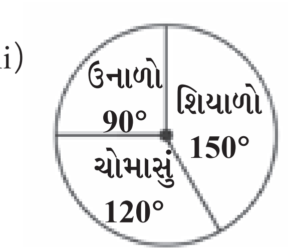
5. બંને વિકર્ણો તેના અંદરના ભાગમાં આવેલા છે.

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ તેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDના વિકર્ણ $\overline{AC}$નું મધ્યબિંદુ O થાય.

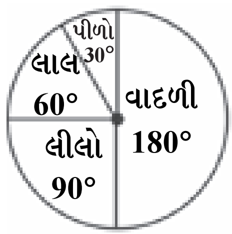
સ્વાધ્યાય 4.1

1. (i) 200 (ii) હળવું સંગીત (iii) શાસ્ત્રીય સંગીત –100, અર્ધ શાસ્ત્રીય સંગીત – 200, હળવું સંગીત – 400, લોક સંગીત – 300

2. (i) શિયાળો (ii) શિયાળો–150°, ચોમાસું–120°, ઉનાળો–90° (iii)

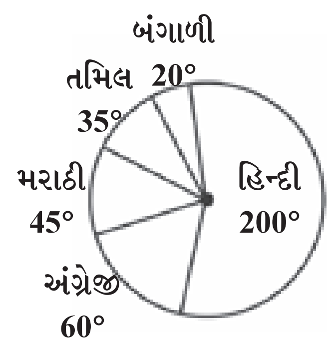


3.



4. (i) હિન્દી (ii) 30 ગુણ (iii) હા

5.



સ્વાધ્યાય 4.2

1. (a) અવલોકનો A, B, C, D

   (b) HT, HH, TH, TT (અહીં, HT અર્થાત્ પ્રથમ સિક્કા ઉપર 'હેડ' અને બીજા સિક્કા ઉપર 'ટેઈલ' એ જ રીતે આગળ....)

2. આપેલી ઘટનામાં પ્રાપ્ત અવલોકનો

   (i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6

   (ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5

3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$

4. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$

5. લીલો વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના $= \frac{3}{5}$

   વાદળી ન હોય તેવો વૃત્તાંશ મળવાની સંભાવના $= \frac{4}{5}$

6. અવિભાજ્ય સંખ્યા મળવાની સંભાવના $= \frac{1}{2}$

   અવિભાજ્ય સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યા મળવાની સંભાવના $= \frac{1}{2}$

   5થી મોટી સંખ્યા મળવાની સંભાવના $= \frac{1}{6}$

   5થી મોટી ન હોય તેવી સંખ્યાઓ મળવાની સંભાવના $= \frac{5}{6}$

સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9
   (vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5
2. કારણ કે, આ સંખ્યાના એકમના અંક
   (i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2
   (vii) 0 (viii) 0
3. (i), (iii)
4. 10000200001, 100000020000001
5. 1020304030201, 101010101^2
6. 20, 6, 42, 43
7. (i) 25 (ii) 100 (iii) 144
8. (i) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13
   (ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21
9. (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

સ્વાધ્યાય 5.2

1. (i) 1024 (ii) 1225 (iii) 7396 (iv) 8649 (v) 5041 (vi) 2116
2. (i) 6, 8, 10 (ii) 14, 48, 50 (iii) 16, 63, 65 (iv) 18, 80, 82

સ્વાધ્યાય 5.3

1. (i) 1, 9 (ii) 4, 6 (iii) 1, 9 (iv) 5
2. (i), (ii), (iii)
3. 10, 13
4. (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64 (v) 88 (vi) 98
   (vii) 77 (viii) 96 (ix) 23 (x) 90
5. (i) 7; 42 (ii) 5; 30 (iii) 7; 84 (iv) 3; 78 (v) 2; 54 (vi) 3; 48
6. (i) 7; 6 (ii) 13; 15 (iii) 11; 6 (iv) 5; 23 (v) 7; 20 (vi) 5; 18
7. 49
8. 45 હરોળ અને દરેક હરોળમાં 45 છોડ
9. 900
10. 3600

સ્વાધ્યાય 5.4

1. (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23 (v) 57 (vi) 37
   (vii) 76 (viii) 89 (ix) 24 (x) 32 (xi) 56 (xii) 30
2. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3
3. (i) 1.6 (ii) 2.7 (iii) 7.2 (iv) 6.5 (v) 5.6
4. (i) 2; 20 (ii) 53; 44 (iii) 1; 57 (iv) 41; 28 (v) 31; 63

5. (i) 4; 23 (ii) 14; 42 (iii) 4; 16 (iv) 24; 43 (v) 149; 81
6. 21 મીટર 7. (a) 10 સેમી (b) 12 સેમી
8. 24 છોડ 9. 16 બાળકો

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (ii) અને (iv)
2. (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 5 (v) 10
3. (i) 3 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 3 (v) 11
4. 20 લંબઘન

સ્વાધ્યાય 6.2

1. (i) 4 (ii) 8 (iii) 22 (iv) 30 (v) 25 (vi) 24
   (vii) 48 (viii) 36 (ix) 56 (x) 45
2. (i) ખોટું (ii) ખરું (iii) ખોટું (iv) ખોટું (v) ખોટું (vi) ખોટું
   (vii) ખરું

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10
2. (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% 3. 28% વિદ્યાર્થીઓ 4. 25 મૅચ 5. ₹ 2400
6. 10 %, ક્રિકેટ → 30 લાખ, ફૂટબૉલ → 15 લાખ, બીજી રમતો → 5 લાખ

સ્વાધ્યાય 7.2

1. ₹ 2,835 2. ₹ 14,560 3. ₹ 2,000 4. ₹ 5000 5. ₹ 1050

સ્વાધ્યાય 7.3

1. (i) આશરે 48,980 (ii) 59,535 2. 5,31,616 (અંદાજિત) 3. ₹ 38,640

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (i) 0 (ii) $ab + bc + ac$ (iii) $-p^2q^2 + 4pq + 9$
   (iv) $2(l^2 + m^2 + n^2 + lm + mn + nl)$
2. (a) $8a - 2ab + 2b - 15$ (b) $2xy - 7yz + 5zx + 10xyz$
   (c) $p^2q - 7pq^2 + 8pq - 18q + 5p + 28$

સ્વાધ્યાય 8.2

1. (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

2. pq; $50mn$; $100\ x^2y^2$; $12x^3$; $12mn^2p$

3.

પહેલી એકપદી → બીજી એકપદી ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^2$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

4. (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

5. (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (i) $4pq + 4pr$ (ii) $a^2b - ab^2$ (iii) $7a^3b^2 + 7a^2b^3$
(iv) $4a^3 - 36a$ (v) 0

2. (i) $ab + ac + ad$ (ii) $5x^2y + 5xy^2 - 25xy$
(iii) $6p^3 - 7p^2 + 5p$ (iv) $4p^4q^2 - 4p^2q^4$
(v) $a^2bc + ab^2c + abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2 - 15x + 3$; (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$
(b) $a^3 + a^2 + a + 5$; (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - pr$ (b) $-2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2yz + 2zx$
(c) $5l^2 + 25ln$ (d) $-3a^2 - 2b^2 + 4c^2 - ab + 6bc - 7ac$

સ્વાધ્યાય 8.4

1. (i) $8x^2 + 14x - 15$ (ii) $3y^2 - 28y + 32$ (iii) $6.25l^2 - 0.25m^2$
(iv) $ax + 5a + 3bx + 15b$ (v) $6p^2q^2 + 5pq^3 - 6q^4$ (vi) $3a^4 + 10a^2b^2 - 8b^4$

2. (i) $15 - x - 2x^2$ (ii) $7x^2 + 48xy - 7y^2$ (iii) $a^3 + a^2b^2 + ab + b^3$
(iv) $2p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3$

3. (i) $x^3 + 5x^2 - 5x$ (ii) $a^2b^3 + 3a^2 + 5b^3 + 20$ (iii) $t^3 - st + s^2t^2 - s^3$
(iv) $4ac$ (v) $3x^2 + 4xy - y^2$ (vi) $x^3 + y^3$
(vii) $2.25x^2 - 16y^2$ (viii) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

સ્વાધ્યાય 9.1

1. 0.88 મી^{2} **2.** 7 સેમી **3.** 660 મી^{2} **4.** 252 મી^{2}

5. 45 સેમી^{2} **6.** 24 સેમી^{2}, 6 સેમી **7.** ₹ 810

8. 140 મી **9.** 119 મી^{2}

10. જ્યોતિની રીત મુજબ, ક્ષેત્રફળ $= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2}$ (30 + 15)મી^{2}

$= 337.5$ મી^{2}

કવિતાની રીતનો ઉપયોગ કરતાં ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15$

$= 337.5$ મી^{2}

11. 80 સેમી^{2}, 96 સેમી^{2}, 80 સેમી^{2}, 96 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 9.2

1. (a) **2.** 144 મી **3.** 10 સેમી **4.** 11મી^{2} **5.** 5 કેન

6. સામ્યતા → બંનેની ઊંચાઈ એક સમાન છે, તફાવત → એક નળાકાર છે, બીજો સમઘન છે. સમઘનની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ વધુ હોય છે.

7. 440 મી^{2} **8.** 322 સેમી **9.** 1980 મી^{2} **10.** 704 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 9.3

1. (a) ઘનફળ (b) પૃષ્ઠફળ (c) ઘનફળ

2. નળાકાર Bનું ઘનફળ વધુ, નળાકાર Bની પૃષ્ઠસપાટીનું ક્ષેત્રફળ વધુ

3. 5 સેમી **4.** 450 **5.** 1 મી **6.** 49500 લિટર

7. (i) 4 ગણું (ii) 8 ગણું **8.** 30 કલાક

સ્વાધ્યાય 10.1

1. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

2. (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

3. (i) 5 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29 (iv) 1 (v) $\frac{81}{16}$

4. (i) 250 (ii) $\frac{1}{60}$ **5.** $m = 2$ **6.** (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$

7. (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

સ્વાધ્યાય 10.2

1. (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}
(iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

2. (i) 0.00000302 (ii) 45000 (iii) 0.00000003
(iv) 1000100000 (v) 5800000000000 (vi) 3614920

3. (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}
(iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

4. 1.0008×10^2

સ્વાધ્યાય 11.1

1. ના **2.**

લાલ રંગ	1	4	7	12	20
મૂળ મિશ્રણ	8	32	56	96	160

3. 24 ભાગ **4.** 700 બોટલ **5.** 10^{-4} સેમી; 2 સેમી **6.** 21 મી

7. (i) 2.25×10^7 સ્ફટિક (ii) 5.4×10^6 સ્ફટિક **8.** 4 સેમી

9. (i) 6 મી (ii) 8 મી 75 સેમી **10.** 168 કિમી

સ્વાધ્યાય 11.2

1. (i), (iv), (v) **2.** $4 \rightarrow 25{,}000$; $5 \rightarrow 20{,}000$; $8 \rightarrow 12{,}500$; $10 \rightarrow 10{,}000$; $20 \rightarrow 5{,}000$
વિજેતાઓની સંખ્યા એ વિજેતાઓને આપવાની ઈનામની રકમના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.

3. $8 \rightarrow 45°$, $10 \rightarrow 36°$, $12 \rightarrow 30°$, (i) હા (ii) 24° (iii) 9

4. 6 **5.** 4 **6.** 3 દિવસ **7.** 15 ખોખાં

8. 49 યંત્ર **9.** $1\frac{1}{2}$ કલાક **10.** (i) 6 દિવસ (ii) 6 વ્યક્તિ **11.** 40 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 12.1

1. (i) 12 (ii) $2y$ (iii) $14pq$ (iv) 1 (v) $6ab$ (vi) $4x$
(vii) 10 (viii) x^2y^2

2. (i) $7(x-6)$ (ii) $6(p-2q)$ (iii) $7a(a+2)$ (iv) $4z(-4+5z^2)$
(v) $10lm(2l+3a)$ (vi) $5xy(x-3y)$ (vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$
(viii) $4a(-a+b-c)$ (ix) $xyz(x+y+z)$ (x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)(x+y)$ (ii) $(3x+1)(5y-2)$ (iii) $(a+b)(x-y)$
(iv) $(5p+3)(3q+5)$ (v) $(z-7)(1-xy)$

સ્વાધ્યાય 12.2

1. (i) $(a+4)^2$ (ii) $(p-5)^2$ (iii) $(5m+3)^2$ (iv) $(7y+6z)^2$
(v) $4(x-1)^2$ (vi) $(11b-4c)^2$ (vii) $(l-m)^2$ (viii) $(a^2+b^2)^2$

2. (i) $(2p-3q)(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)(5a+2b-7c)$

3. (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

4. (i) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

5. (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

સ્વાધ્યાય 12.3

1. (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

2. (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

3. (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

4. (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$ (iv) $4(y^2+5y+3)$
(v) $(x+2)(x+3)$

5. (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$
(v) $\frac{5}{2}q(p-q)$ (vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

સ્વાધ્યાય 13.1

1. (a) 36.5°C (b) બપોરે 12 વાગ્યે (c) 1 p.m. , 2 p.m.

(d) 36.5°C, 1 p.m. અને 2 p. m. વચ્ચેનું X-અક્ષ પરનું બિંદુ એ 1 p. m. અને 2 p. m.થી સમાન અંતરે હોય છે. જે 1.30 p.m. દર્શાવે છે. આ જ રીતે Y-અક્ષ પરનું 36°C અને 37°C વચ્ચેનું બિંદુ 36.5°C દર્શાવે છે.

(e) 9 a.m. થી 10 a.m., 10 a.m. થી 11 a.m., 2 p.m. થી 3 p.m.

2. (a) (i) ₹ 4 કરોડ (ii) ₹ 8 કરોડ

(b) (i) ₹ 7 કરોડ (ii) ₹ 10 કરોડ

(c) ₹ 4 કરોડ (d) 2005

3. (a) (i) 7 સેમી (ii) 9 સેમી

(b) (i) 7 સેમી (ii) 10 સેમી

(c) 2 સેમી (d) 3 સેમી (e) બીજું અઠવાડિયું (f) પહેલું અઠવાડિયું

(g) બીજા અઠવાડિયાના અંતે

4. (a) મંગળ, શુક્ર, રવિ (b) 35°C (c) 15°C (d) ગુરુ

6. (a) 4 એકમ = 1 કલાક (b) $3\frac{1}{2}$ કલાક (c) 22 કિમી

(d) હા, તે આલેખના સમક્ષિતિજ ભાગથી દર્શાવી શકાય છે. (10 a.m. – 10:30 a.m.)

(e) 8 a.m. અને 9 a.m.ની વચ્ચે

7. (iii) શક્ય નથી.

સ્વાધ્યાય 13.2

1. (b) (i) 20 કિમી (ii) 7.30 a.m. (c) (i) હા (ii) ₹ 200 (iii) ₹ 3500

2. (i) હા (ii) ના

ગમ્મત સાથે જ્ઞાન

1. પાયથાગોરસની ત્રિપુટી વિશે થોડું વધુ જોઈએ,

આપણે પાયથાગોરસની ત્રિપુટી શોધવા માટેની એક રીત જોઈ તે મુજબ,

$2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ પાયથાગોરસ ત્રિપુટી થાય.

પાયથાગોરસની ત્રિપુટી a, b અને $c \in$ R માટે $a^2 + b^2 = c^2$. જો આપણે બે પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો m અને n $(m > n)$નો ઉપયોગ કરીએ અને જો $a = (m^2 - n^2)$, $b = 2mn$, $c = (m^2 + n^2)$ લઈએ તો જોઈ શકાય છે કે $c^2 = a^2 + b^2$ ની ગણતરી સાચી ઠરે છે.

તેથી m અને n ની જુદી-જુદી કિંમતો માટે આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ a, b, c એવી શોધી શકીએ કે જેથી પાયથાગોરસની ત્રિપુટી બને.

ઉદાહરણ તરીકે, $m = 2$, $n = 1$ લો.

તેથી $a = m^2 - n^2 = 3$, $b = 2mn = 4$, $c = m^2 + n^2 = 5$ આમ, 3, 4, 5 એ પાયથાગોરસની એક ત્રિપુટી છે. (તપાસો !)

હવે, $m = 3$, $n = 2$ લઈએ તો,

$a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ મળે. જે પણ પાયથાગોરસની ત્રિપુટી જ છે.

આમ, m, nની હજુ વધુ કિંમતો લઈ થોડી વધુ ત્રિપુટી બનાવો.

2. જ્યારે પાણીને ઠંડું કરવામાં આવે ત્યારે તેનું ઘનફળ 4% વધે છે, તો 221 સેમી^{3} બરફ બનાવવા કેટલું પાણી જોઈએ ?

3. જો ચાની ભૂકીના ભાવમાં 20% વધારો થાય તો તેના ઉપયોગમાં કેટલો ઘટાડો કરીએ જેથી ખર્ચ પહેલાં જેટલો એક સમાન જળવાઈ રહે ?

4. ઈ.સ. 1958માં ગૌરવ પુરસ્કાર આપવાની શરૂઆત થઈ ત્યારે 28 વિભાગમાં (Categories) ગૌરવ પુરસ્કાર આપવામાં આવતા હતા. ઈ.સ. 1993થી 81 વિભાગમાં ગૌરવ પુરસ્કાર અપાય છે.

(i) ઈ.સ. 1958માં આપવામાં આવેલ ગૌરવ પુરસ્કારની સંખ્યા ઈ.સ. 1993ની સંખ્યાના કેટલા ટકા થાય ?

(ii) ઈ.સ. 1993માં આપવામાં આવેલ ગૌરવ પુરસ્કારની સંખ્યા ઈ.સ. 1958ની સંખ્યાના કેટલા ટકા થાય ?

5. મધપૂડાની કુલ મધમાખીમાંથી $\frac{1}{5}$ ભાગની મધમાખી કદમ્બની કળીઓ ઉપર બેસે છે. $\frac{1}{3}$ ભાગ સિલિન્ધીરીનાં ફૂલ ઉપર બેસે છે અને ઉપરોક્ત બંને સંખ્યાના તફાવતના ત્રણ ગણી મધમાખીઓ કુતાજા પર બેસે છે, માત્ર દસ જ મધમાખીઓ મધપૂડા પર બાકી રહે છે. તો મધપૂડા પરની કુલ મધમાખીઓની સંખ્યા શોધો. (**નોંધ :** કદમ્બ, સિલિન્ધીરી, કુતાજા એ ફૂલછોડનાં નામ છે. આ કોયડો પ્રાચીન ભારતીય બીજગણિતમાંથી લેવામાં આવ્યો છે.)

6. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, શેખર ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરે છે જ્યારે તેનો મિત્ર ફારુખ ચોરસની પરિમિતિના સૂત્રનો ઉપયોગ કરે છે. રસપ્રદ વાત એ છે કે બંનેના જવાબ એક સમાન આવે છે. શું તમે એ શોધી શકો કે ચોરસની બાજુના એકમ કેટલા હશે ?

7. જે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની બાજુના માપના છ ગણાથી સાંખ્યિક રીતે ઓછું હોય તેવા ચોરસની બાજુઓનાં માપ શોધો.

8. જે લંબવૃત્તીય નળાકારનું ઘનફળ તેની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું જ હોય તેવા નળાકાર શક્ય છે ? જો હા, તો તેની ત્રિજ્યાનું માપ શોધો.

9. લીલા તેના જન્મદિવસની ઊજવણી નિમિત્તે તેના મિત્રોને આમંત્રણ આપે છે. તેની માતા ટેબલ (મેજ) ઉપર નાસ્તા માટે થોડી ડિશ અને થોડી પૂરી મૂકે છે. લીલા દરેક ડિશમાં 4 પુરી મૂકે છે. તેમ છતાં એક ડિશ વધે છે. જો તે દરેક ડિશમાં 3 પૂરી મૂકે તો એક પૂરી વધે છે. તો ટેબલ પર મૂકવામાં આવેલ કુલ ડિશ અને કુલ પૂરીની સંખ્યા શોધો.

10. શું એવી કોઈ સંખ્યા મળે જેનો ઘન તેના જેટલો જ થાય. પરંતુ તેના વર્ગ તેની બરાબર ન હોય ? જો હા, તો એ શોધી કાઢો.

11. 1 થી 20 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેને હારમાં ગોઠવવાથી કોઈ પણ બે પાસ-પાસેની સંખ્યાઓનો સરવાળો પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા બને.

જવાબો

2. $212\frac{1}{2}$ સેમી^{3}
3. $16\frac{2}{3}\%$
4. (i) 34.5% (ii) 289%
5. 150
6. 4 એકમ
7. બાજુઓનાં માપ : 1, 2, 3, 4, 5 એકમ
8. હા, જેની ત્રિજ્યા = 2 એકમ
9. પૂરીની સંખ્યા = 16

   ડિશની સંખ્યા = 5
10. –1
11. 1, 3, 6, 19, 17, 8

    (**સૂચના :** 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 19 = 25...વગેરે અન્ય રીતે પણ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.)

નોંધ